

Instrumento en MEXDER: modelo de tres factores para opciones sobre tipo de cambio

Instrument in MEDEX: three-factor model for exchange rate options

Najera-López M.L.¹ , De-Jesús R.²  (*mlnajeral@uaemex.mx)

Recibido: 19 de enero de 2024 Aceptado: 30 de enero de 2024

RESUMEN

En respuesta a las crisis cambiarias actuales, diversos actores financieros, desde inversionistas hasta empresas y bancos centrales, buscan salvaguardarse ante las incertidumbres de variables macroeconómicas tales como la divisa y las tasas de interés. Este estudio considera al modelo de Heston [1], en colaboración con Hull y White [2], generando un modelo de tres factores para valorar opciones en el mercado MXN/USD. La estimación de parámetros abarcó el periodo 2003-2018, calculando primas para opciones de compra *Call* y de venta *Put*. Los resultados indican una tendencia de subvaloración para las opciones *Call* OTM y *Put* ITM, mientras

que las opciones *Call* ITM y *Put* OTM tienden a ser sobrevaloradas. Los errores muestran una magnitud del 11.79 % para *Call* OTM de mayor vencimiento, disminuyendo a un 2.05 % para vencimientos cercanos. En el caso de opciones *Put*, se observa un máximo error del 8.71 %. Estos hallazgos proveen información esencial para los participantes del mercado, destacando la necesidad de considerar cuidadosamente las proyecciones del modelo en entornos financieros dinámicos.

Palabras clave: *Tipo de cambio, Cobertura, Volatilidad.*

ABSTRACT

In response to the current exchange crises, various financial actors, from investors to companies and central banks, seek to safeguard themselves against the uncertainties of macroeconomic variables such

as the currency and interest rates. This study considers the Heston model [1], in collaboration with Hull and White [2], generating a three-factor model to value options in the MXN/USD market. The pa-

¹Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México. Paseo Universidad S/N. Toluca, Estado de México, México. CP. 50100.

²Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México. Paseo Universidad S/N. Toluca, Estado de México, México. CP. 50100.



parameter estimation covered the period 2003-2018, calculating premiums for Call purchase and Put sale options. The results indicate an undervaluation trend for Call OTM and Put ITM options, while Call ITM and Put OTM options tend to be overvalued. The errors show a magnitude of 11.79 % for OTM Calls with longer maturities, decreasing to 2.05 % for close maturities. In the case of Put op-

tions, a maximum error of 8.71 % is observed. These findings provide essential information for market participants, highlighting the need to carefully consider model projections in dynamic financial environments.

Keywords: *Exchange rate, Hedging, Volatility.*

INTRODUCCIÓN

La conjunción de la gestión de riesgos y las tecnologías de la información ha generado profundas transformaciones en los mercados financieros. Estas transformaciones no solo se han traducido en la mejora de la disponibilidad de información eficaz, sino que también han brindado expectativas continuas para la cobertura e inversión. En un contexto de mercados globalizados, dinámica económica y la presencia activa del país mexicano en los mercados globalizados, la incertidumbre en las variables económicas y financieras dan lugar a una notable volatilidad en los mercados, y a la incertidumbre que afecta a inversionistas individuales e institucionales en sus proyectos financieros. En respuesta a este entorno complejo, el empleo de instrumentos derivados, incluidas las opciones, se presenta como una estrategia para mitigar el riesgo inherente a las posiciones de mercado. Esto se logra a través del pago de primas que permiten reducir la exposición a los vaivenes del mercado. En un escenario donde la incertidumbre y la volatilidad de la moneda, la utilización de estos instrumentos proporciona una herramienta valiosa para los agentes financieros que buscan salvaguardar sus inversiones y proyectos de manera más efectiva.

En el marco de la desregulación e innovación financiera, los mercados han experimentado una notoria inestabilidad, caracterizada por períodos de elevada y pronunciada volatilidad. Si bien la creciente liquidez en estos mercados ha actuado como un alivio frente al estrés y las crisis financieras, también ha dado lugar a la aparición de nuevos escenarios críticos, desencadenando quiebras tanto en conglomerados financieros como no financieros. Como respuesta a este entorno dinámico y desafiante, se han desarrollado instrumentos financieros sofisticados con el propósito de prevenir y gestionar escenarios no favorables. Pero la complejidad inherente a estos instrumentos ha contribuido, en ciertos casos, a la exacerbación de diferentes crisis financieras. Un ejemplo paradójico es el modelo de Black-Scholes (BS), adoptado desde 1975 como modelo estándar por la bolsa de Chicago. En 1987, este modelo interpretó la peor caída de los precios del mercado financiero. En este año, los costos de las acciones experimentaron una fuerte disminución, generando una demanda extraordinaria de opciones diseñadas para mitigar los efectos de tales situaciones. Sin embargo, el modelo no calculó correctamente los precios debido a la constatación

de que la volatilidad no era, en realidad, constante [3]. Este episodio ilustra la necesidad de equilibrar la sofisticación de los instrumentos financieros con una gestión cautelosa de la volatilidad, reconociendo que la complejidad puede ser un factor que considerar en la estabilidad de los mercados.

Las fuertes depreciaciones del tipo de cambio mexicano a lo largo de los años revelan la vulnerabilidad de instituciones financieras, empresas y el Estado ante cambios imprevistos en la paridad peso-dólar. En 1982, la devaluación alcanzó un impactante 470.53 %, descendiendo de 26.16 a 149.25 pesos/dólar de manera abrupta. Entre 1994 y 2000, la desvalorización fue del 79.9 %, seguida de un 13.7 % de depreciación de 2000 a 2006. En 2008, el peso experimentó una caída del 23 %. Estos eventos subrayan la exposición significativa a fluctuaciones de la moneda mexicana frente a la americana. A pesar de la relativa estabilidad económica entre 2002 y 2007, con solo una depreciación del 5.21 % del peso, muchas empresas especularon con instrumentos financieros. Sin embargo, la crisis financiera global de 2008 resultó en graves perjuicios para empresas mexicanas, como Comercial Mexicana, Cemex, Alfa y Bachoco, que sufrieron pérdidas catastróficas. La falta de visión de los administradores empresariales en cuanto a la diversificación de riesgos se hizo evidente. Frente a esta situación, se subraya la relevancia de gestionar de manera efectiva los riesgos financieros para fundamentar una toma de decisiones informada y acertada. La necesidad de desarrollar mecanismos de cobertura y diversificación se hace patente, con modelos que proporcionan precios de opciones sobre divisas, reduciendo así el riesgo asociado al mercado cambiario [4]. Investigaciones especializadas señalan que las adaptaciones realizadas a BS revelan sesgos sistemáticos en la evaluación de opciones sobre divisas. Estos sesgos están directamente vinculados con factores como tasas de interés, activo subyacente, volatilidad estocástica, prima de la opción y el tiempo de expiración, según se expone en estudios [5] y [6].

En este contexto, el objetivo es evaluar la prima de la opción sobre la divisa MXN/USD, considerando la tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad, ambas estocásticas durante el periodo 2004-2018. La finalidad de este análisis es ofrecer resultados detallados mediante el modelo utilizado, con el propósito de brindar herramientas estratégicas a los inversionistas. Dichas herramientas permitirían a dichos inversionistas diversificar eficazmente sus portafolios de inversión, al tiempo que gestionan y reducen el riesgo inherente a sus operaciones financieras.

Desde la instauración del modelo de BS y, en particular, tras el declive de los mercados financieros a finales de la década de 1980, se han planteado diversos modelos complejos con el propósito de flexibilizar las restricciones de BS. A pesar de que este modelo presenta cualidades teóricas y prácticas, sus principios, como volatilidad y tasa de interés constantes, carecen de respaldo en la realidad de los mercados bursátiles. Una gran variedad de modelos anda en busca de considerar a la volatilidad estocástica. Investigaciones ejemplares que se centran en la volatilidad estocástica incluyen [7], [8], [1] y [9].

En contraste, frente a la evolución de mercados financieros caracterizados por instrumentos cada vez más complejos influenciados por los movimientos de tasas de interés, se destacan modelos que sobresalen por su simplicidad analítica [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. Además, se han desarrollado modelos que incorporan múltiples factores de riesgo para explicar la dinámica de dichas tasas [17], [16].

Para la valoración de opciones europeas sobre tipo de cambio, Ahlip [18] analiza el trabajo de Schöbel y Zhu [9] en donde incorpora tasas de interés estocásticas; este modelo se diferencia [19], [20], [21], y [22] por su expresión matemática de fijación de precios para una opción de compra *Call*, y una solución cerrada con Heston [1]. Cabe destacar que este modelo se mantiene en el ámbito teórico.

En adición, destaca el modelo teórico de vanHaastrecht y Lord [23], el cual presenta un modelo nombrado Schöbel-Zhu-Hull-White con el cual se obtienen primas con volatilidad y tasas de interés estocásticas. Estos investigadores amplían el modelo de Schöbel y Zhu [9], fusionándolo con el de Hull y White [15], incorporando tasas de interés estocásticas para vencimientos a largo plazo. Este enfoque considera explícitamente la correlación entre los procesos Brownianos de los factores involucrados, entre la volatilidad, el precio del subyacente y las tasas de interés. Proponen la integral para evaluar la función característica de la prima de la opción, logrando precios de opciones *Call* europeas, de manera eficiente mediante un modelo de forma cerrada, resuelto a través de la transformada inversa de Fourier [24].

Por su parte, Grzelak y Oosterlee [25], su modelo se vincula la volatilidad [1] y las tasas de interés, ambas estocásticas [15]. Este modelo refleja primas más precisas en las opciones con vencimientos prolongados [26], [27], y es fácil su calibración. Otorga precios estables y confiables para opciones ITM en comparación con Heston [1].

En otra vertiente, Haentjens y Hout [28] exploran el modelo formado por la volatilidad, la divisa y la tasa de interés, todo variable en el tiempo, conformado por Heston [1] y Hull y White [2], con el propósito de encontrar una técnica eficiente para estimar de los parámetros que aprueban los procesos de difusión.

Asimismo, Haentjens [29] examina las primas de las *Call* europeas al combinar el proceso de Heston [1] y el de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), revelando mayor variación que la propuesta Heston-Hull-White. Posteriormente, Anthonie [30] propone modelos híbridos, incorporando también basándose en Heston [1] y en Hull y White [15] para tasas de interés. Este enfoque, de naturaleza teórica, estudia modelos de estimación para hallar un mejor precio de la opción. Hallazgos similares encontró Van der Stoep [31]. De manera semejante, Cozma y Reisinger [32] realizan estimaciones teóricas de parámetros para Heston-CIR a través de Monte Carlo en opciones sobre tipo de cambio. Este hallazgo refuerza la premisa de que los modelos de tres factores amortiguan las fluctuaciones en los precios teóricos, respecto a las del mercado.

Reiteradamente, el enfoque tridimensional Heston-Hull-White ha sido objeto de estudio por Hendricks [33] y Ullah [34]. La evidencia teórica respalda la idea, que, al incorporar estos procesos de difusión, la prima de la opción es más justa. Cabe señalar, que el objetivo es desarrollar modelo para obtener parámetros que asegure la consistencia de las primas teóricas. De manera similar, Liang y Xu [35] se centran en cálculos para estimar y calibrar los parámetros en un modelo de tres factores Heston-CIR, mientras que Soleymani y Nemati [36] emplean un esquema computacional basado en Diferencias Finitas, demostrando ser eficiente y estable. Por su parte, Liu [37] utiliza la metodología del Esquema de Diferencias Finitas (RBF-FD) para simular los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales parciales en el modelo Heston-Hull-White. Aunque confirman que es un método estable, reconocen que el tiempo de cálculo necesita mejoras.

En conjunto, estos avances en modelos de tres factores ofrecen mayor seguridad a los inversionistas financieros, ya que, ante la turbulencia en los mercados, el único riesgo es la pérdida de la prima, sin exponer todo su capital. Este progreso indica una dirección hacia el desarrollo de métodos numéricos eficientes para obtener precios confiables.

MODELACIÓN MATEMÁTICA FINANCIERA

La evidencia empírica ha validado la necesidad de incorporar un comportamiento estocástico en los modelos de valuación de opciones, particularmente en relación con la tasa de interés y la volatilidad del activo subyacente. En este contexto, se introduce un modelo matemático que facilita la obtención de la prima de la opción a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas, representado de la siguiente manera mediante la Ec. 1.

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t &= \kappa(\eta - v_t)dt + \lambda\sqrt{v_t}dW_t^2 \\ dr_t &= a(\theta(t) - r_t)dt + \sigma dW_t^3 \end{aligned} \quad (1)$$

En el contexto del modelo donde $0 \leq t \leq T$ con T el vencimiento de la opción; las variables aleatorias S_t (prima del activo subyacente), v_t (varianza de los rendimientos del activo subyacente), y r_t (tasa de interés libre de riesgo), durante el tiempo t . Los parámetros por estimar por el método de Nelder-Mead [38] son: η , κ , λ , a , σ y ρ_{S_v} . El proceso es semejante para la tasa de interés libre de riesgo r_t , que converge a su media ($\theta(t)$) con una velocidad (a) y, y volatilidad de la tasa de interés (σ). Finalmente, W_t^1 , W_t^2 y W_t^3 , que representan movimientos Brownianos, junto con W_t^3 el cual es independiente de W_t^1 y W_t^2 , además correlacionados, $\rho \in [-1, 1]$.

El modelo presentado en Ec. 1 otorga una ampliación del modelo de BS [39], con volatilidad y tasa de interés estocásticos [20], con varianza ν_t [1] y tasa de interés r_t [2]. Siendo el precio del activo subyacente es S_t y v_t la varianza.

Basándose en los principios de no arbitraje, el precio de la opción *Call* $C(S_t, v_t, r_t, t)$ satisface la ecuación diferencial Ec. 2 parcial parabólica (EDP)

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} S_t^2 v_t \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 v_t \frac{\partial^2 C}{\partial v_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r_t^2} \\ & + \rho \lambda S_t v_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial v_t} + r_t S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \kappa(\eta - v_t) \frac{\partial C}{\partial v_t} \\ & + a(\theta(t) - r_t) \frac{\partial C}{\partial r_t} - r_t C \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando $S_t > 0$, $-\infty < r_t < \infty$, $0 \leq t \leq T$, $v_t > 0$.

La Ec. 2 es una ecuación tridimensional con dominio espacial Ec. 3. La premisa para el precio un *Call* es:

$$C(S_t, v_t, r_t, T) = \max(0, S - K) \quad (3)$$

siendo $K > 0$ la prima del *Call*. Igualmente, al mantener una condición de frontera $S_t = 0$ se tiene Ec. 4:

$$C(0, v_t, r_t, t) = 0 \quad (0 \leq t < T) \quad (4)$$

Realizando cambio de variables, se tiene Ec. 5:

$$\hat{C}(x, v_t, r_t, t) = C(e^x, v_t, r_t, t) \quad (5)$$

Entonces $\hat{C}$ satisface la EDP Ec. 6

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \hat{C}}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 v_t \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial v_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial r_t^2} \\
& + \rho \lambda v_t \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x \partial v_t} + \left(r_t - \frac{1}{2} v_t \right) \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} + \kappa (\eta - v_t) \frac{\partial \hat{C}}{\partial v_t} \\
& + a (\theta(t) - r_t) \frac{\partial \hat{C}}{\partial r_t} - r_t \hat{C} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

considerando el dominio espacial $(x, v_t, r_t) \in R \times (0, \infty) \times R$ se tiene Ec. 7

$$\hat{C}(x, v_t, r_t, T) = \max(0, e^x - K) \tag{7}$$

Tal como en Heston [1], se asume una solución de forma cerrada Ec. 8

$$\hat{C}(x, v_t, r_t, t) = e^x P_1(x, v_t, r_t, t) - KB(t, T) P_2(x, v_t, r_t, t) \tag{8}$$

Sabiendo que $B(r, t)$ es el precio del bono cupón cero en t , con pago al vencimiento de \$1, y en el tiempo t pagar el precio de la tasa de interés r_t [2]. Esta investigación examina la configuración temporal de una curva de bonos cupón cero, utilizando datos de mercado para obtener los precios de los bonos. La dinámica de la tasa de interés [10] es Ec. 9:

$$dr_t = a(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t \tag{9}$$

siendo a, θ y σ parámetros, dW_t un Movimiento Browniano Estándar definido en $(\Omega, F, (F_t)t \geq 0, P)$.

Para hacer una extensión al modelo de Vasicek [10], Hull y White [2] introducen un parámetro $\theta(t)$, como se muestra a continuación (Ec. 10):

$$dr_t = a(\theta(t) - r_t) dt + \sigma dW_t \tag{10}$$

Por lo tanto, el precio del bono $B(t, T)$ es calculado por la EDP parabólica Ec. 11:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(\theta(t) - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \tag{11}$$

donde la condición $B(T, T) = 1$ y $B(t, T)$ está definida por la Ec. 12

$$B(t, T) = e^{b(r, t)} \quad (12)$$

con $B(T, T) = 1$ y sustituyendo las derivadas parciales $\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B$, $\frac{\partial B}{\partial r_t} = -DB$ y $\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = D^2 B$ en Ec. 11, se tiene la Ec. 13:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) (1) + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2(1) - a(\theta(t) - r_t) D(1) - r_t(1) = 0 \quad (13)$$

Ahora bien, si se simplifica la ecuación Ec. 13 se obtiene la Ec. 14

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - a(\theta(t) - r_t) D - r_t = 0 \quad (14)$$

con la expresión Ec. 15

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1 \quad (15)$$

Realizando la integral da como resultado Ec. 16

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (16)$$

al sustituir la Ec. 15 en la Ec. 14 se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t aD + r_t + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - a\theta(t)D + ar_t D - r_t = 0$$

y como,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - a\theta(t)D = 0$$

la Ec. 17 muestra la derivada parcial de A con respecto a t

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a\theta(t)D - \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 \quad (17)$$

si la Ec. 16 se sustituye en la Ec. 17 se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a\theta(t) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2$$

De la misma manera, si se simplifica el resultado es la Ec. 18

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \theta(t) (1 - e^{-a(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \quad (18)$$

La ecuación diferencial parcial Ec. 18 tiene como solución a la Ec. 19

$$A(t, T) = \int_t^T \theta(s) (1 - e^{-a(T-s)}) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \quad (19)$$

Al realizar la integración da la Ec. 20

$$A(t, T) = \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - D(t, T) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}) \quad (20)$$

Después de sustituir la Ec. 16 en Ec. 20, se tiene la Ec. 21

$$A(t, T) = \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 (1 - e^{-2at}) \quad (21)$$

Si los valores son infinitamente pequeños $\frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t)$ tiende a cero, y se tiene la Ec. 22

$$A(t, T) = \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{\sigma^2}{4a} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 (1 - e^{-2at}) \quad (22)$$

En Ec. 23 se presenta la fórmula semi-cerrada

$$B(t, T) = e^{b(r, t)} \quad (23)$$

Con $b(r, t) = A(t, T) - r_t D(t, T)$ que es igual a Ec. 24

$$b(r, t) = \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{\sigma^2}{4a} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 (1 - e^{-2at}) - r_t \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \quad (24)$$

Y si el costo del bono cupón cero en t y en T (al vencimiento) paga una unidad monetaria, además cumple con la EDP parabólica (Ec. 25).

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(\theta(t) - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \quad (25)$$

Retomando la Ec. 8, por linealidad, satisface la EDP Ec. 6 y además P_1 , se muestra la Ec. 26

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\lambda^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \\ & + \rho\lambda v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} + \left(r + \frac{1}{2}v \right) \frac{\partial P_1}{\partial x} \\ & + [\kappa(\eta - v) + \rho\lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} + (\theta(t) - ar) \frac{\partial P_1}{\partial r} \end{aligned} \quad (26)$$

y mediante la Ec. 9, P_2 cumple con la EDP siguiente Ec. 27

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\lambda^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} \\ & + \rho\lambda v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} + \left(r - \frac{1}{2}v \right) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \kappa(\eta - v) \frac{\partial P_2}{\partial v} \\ & + \left(\theta(t) - ar + \sigma^2 \frac{\partial b}{\partial r} \right) \frac{\partial P_2}{\partial r} \end{aligned} \quad (27)$$

Además de Ec. 7 las condiciones finales para las EDP Ec. 25 y Ec. 26 son Ec. 28

$$P_j(x, v, r, T) = 1 \quad \text{para } x > \ln K \quad \text{y} \quad P_j(x, v, r, T) = 0 \quad \text{para } x < \ln K \quad (28)$$

Para cuando $j = 1, 2$, de manera respectiva.

Considerando el teorema de Feynman-Kac [40], la solución para probabilidades (P_1 y P_2) de las Ec. 26 y Ec. 27, se tiene la función característica del indicador correspondiente a Ec. 29. Se presenta la forma semi-cerrada para las probabilidades (P_1 y P_2) para resolver sus funciones características, se tiene Ec. 29

$$P_j(x, v, r, T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iu \ln K} f_j(x, v, r, t; u)}{iu} \right] du \quad (29)$$

las funciones f_1 y f_2 deben satisfacer las Ec. 26 y Ec. 27, bajo la siguiente condición Ec. 30:

$$f_j(x, v, r, T; u) = e^{iux} \quad (30)$$

Donde Ec. 31 es una solución del tipo de Heston [1], con tasa de interés estocástica [43]

$$f_1(x, v, r, t; u) = \exp [F_1(u, t) + G_1(u, t)v + H_1(u, t)r + iur] \quad (31)$$

y Ec. 32 es una solución para f_2 [20] [1] [43]:

$$f_2(x, v, r, t; u) = \exp [F_2(u, t) + G_2(u, t)v + H_2(u, t)r + iur - b(r, t)] \quad (32)$$

Por su parte, la Ec. 33 da la integral de F_j :

$$\begin{aligned} F_j(t; u) = & \frac{\alpha}{\lambda^2} \left\{ (\beta_j - \rho \lambda u i + d_j) (T - t) - 2 \ln \left[\frac{1 - g_j e^{d_j(T-t)}}{1 - g_j} \right] \right\} \\ & + \frac{ui - \delta_j}{a} \int_t^T \theta(s) (1 - e^{-a(T-t)}) ds \\ & + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{ui - \delta_j}{a} \right)^2 \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

para $j = 1, 2$

Las expresiones anteriores forman la fórmula semi-cerrada de las primas de las opciones *Call*, bajo el sistema Ec. 1, lo cual es una extensión de Heston [1]. Para un mayor análisis matemático del modelo consultar Najera [43].

Para la opción de venta *Put*¹, es semejante el procedimiento, cuya condición $\hat{P}(x, \nu, r_t, T) = \max(0, K - e^x)$. La prima de la opción de venta *Put* se establece en la Ec. 34:

$$\hat{P}(x, v_t, r_t, t) = KB(t, T)P_2(x, v_t, r_t, t) - e^x P_1(x, v_t, r_t, t) \quad (34)$$

¹Put (Opción de Venta). Esta Opción da a su comprador el derecho a vender y a su vendedor la obligación de comprar el activo subyacente, al precio de ejercicio y en una fecha predeterminada o fecha de vencimiento (Opción Europea) [42].

APLICACIÓN DEL MODELO

En el proceso de estimación y validación de los parámetros, se emplean los precios diarios correspondientes al tipo de cambio MXN/USD, los cuales se obtuvieron de la base de datos DataStream. Este análisis comprende del 14-abril- 2003 al 30-noviembre-2018, con un total de 3830 observaciones. La elección de este intervalo temporal se fundamenta cuando el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) inicia operaciones de opciones, así como en la inclusión del periodo de alta turbulencia provocada por la crisis financiera global y las perturbaciones de los mercados hasta 2018².

Para calcular la prima del modelo Heston-Hull-White, primero se estiman los parámetros usando la metodología de Nelder-Mead, considerando un vector inicial conformado por los estadísticos descriptivos y realizar la comparación de las primas teóricas y las que surgen en el mercado.

La Figura 1 exhibe la gran volatilidad en el tipo de cambio, especialmente acentuada durante la crisis financiera global de 2008, los desastres naturales en Asia y la crisis de deuda soberana en la zona euro en 2011. Además, en 2012, se observa incertidumbre derivada del ajuste fiscal previsto para 2013 en Estados Unidos. Estos eventos resaltan la importancia de implementar modelos que incorporen la volatilidad de la divisa en el cálculo del precio de la opción. Esta práctica permite a los agentes económicos, financieros y administradores de riesgos protegerse ante las eventualidades presentes en los mercados financieros.

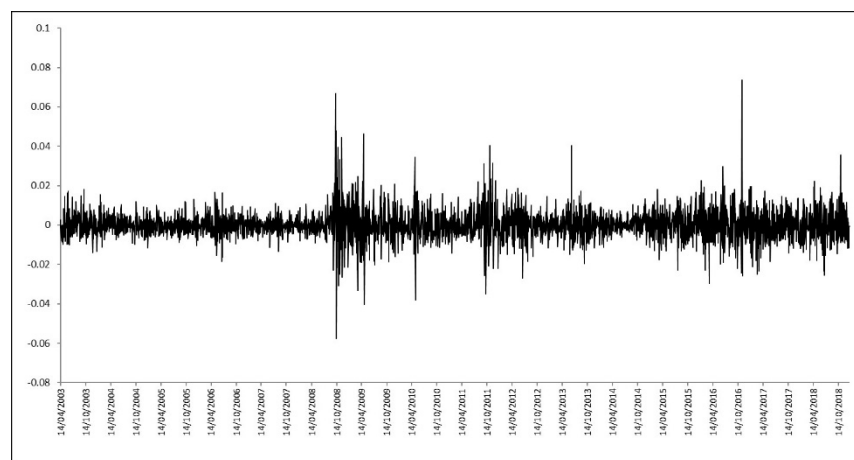


FIGURA 1. Rendimientos del tipo de cambio MXN/USD. Fuente: Elaboración propia.

Empleando la metodología descrita, en la Tabla 1 se aprecia los estadísticos descriptivos con los cuales se conforma el vector inicial para alimentar al algoritmo y estimar los parámetros. También se presentan las pruebas de heteroscedasticidad para verificar si los rendimientos presentan volatilidad estocástica [41] y es estacionaria; lo que ayudará a obtener primas más justas.

²La base de datos se adquirió con recursos propios en el Mercado de Derivados Mexicano, y por cuestiones administrativas del MEXDER sólo se pudo adquirir hasta el 2018. El periodo de los datos diarios fue suficiente para calibrar el modelo.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos y pruebas de los rendimientos de la divisa MX/USD y las tasas de interés interna y externa. Fuente:Elaboración propia.

2003-2018		Diarios	
Variables		Rendimientos MX/USD	Cambios ($r_D - r_E$)
Estadísticos	Media	0.0159	-0.0002
	Mediana	-0.0195	-0.0004
	Desviación estándar	0.7162	0.0757
	Varianza	0.5130	0.0057
	Asimetría	0.6836	0.5495
	Curtosis	12.6188	24.4243
	Máximo	7.3724	0.8640
	Mínimo	-5.7561	-0.8252
	Jarque-Bera	15196.8	64181797.2
	Valor- p	0.0000	0.0000
Heteroscedasticidad	Prueba de White		
	F-estadístico	53.4875	31.5729
	No. Obs*R ²	52.7841	31.3331
	Valor- p	0.0000	0.0000
	Prueba de raíces unitarias		
ADF	t-estadístico	-60.667	-52.445
	Valor- p	0.0000	0.0000
	Durbin-Watson	1.9992	2.0098
PP	t-estadístico	-60.650	-128.272
	Valor- p	0.0000	0.0001
	Durbin-Watson	1.9992	1.9268

Ante los sucesos previamente mencionados, se observa que la moneda mexicana experimenta una mayor variabilidad que las tasas de interés, evidenciada por una desviación estándar de 0.7162, contrastando con la cifra de 0.0757 asociada a las tasas de interés. Respecto a los diferenciales en los niveles de tasas de interés, se registra un promedio igual a -0.0002 por ciento, presentando un máximo de 0.8640 el 10-octubre-2016 y un mínimo de -0.8252 por ciento el 19-septiembre-2008. En resumen, la moneda mexicana advirtió notables depreciaciones frente al dólar estadounidense, corroborado numéricamente mediante la diferencia entre los valores máximo y mínimo de cada serie, como se ilustra en la Figura 1.

La serie de rendimientos muestra una asimetría positiva, al igual que la serie de tasas de interés, destacándose además por presentar un exceso de curtosis. Ambas series financieras exhiben colas más amplias y prolongadas que la distribución normal, especialmente en la cola derecha. La positividad del coeficiente de asimetría indica que los rendimientos extremos positivos (depreciación del peso mexicano) tienen una probabilidad de ocurrencia superior a los extremos negativos. Este patrón se mantiene en los diferenciales de tasas de interés libre de riesgo, donde hay una mayor probabilidad de que ocurra un aumento en las tasas de interés. La aplicación de la prueba estadística Jarque-Bera, junto con un valor-p que se sitúa por debajo del nivel de significancia de 0.05, sustenta la afirmación de que las series no satisfacen el requisito de normalidad.

La aplicación de la prueba de White confirma la presencia de volatilidad estocástica en los rendimientos del tipo de cambio y en los diferenciales de tasas de interés, al rechazar la hipótesis nula.

La prueba de White respalda la presencia de volatilidad estocástica en los rendimientos de la divisa y en los diferenciales de las tasas de interés, al rechazar la $H_0 : \sigma_t^2 = \sigma^2$. Los estadísticos obtenidos ($N * R^2 = 52,7841 > \chi^2 = 3,841$ y $31,3331 > \chi^2 = 3,841$, para ambas series respectivamente), superan los valores críticos y los valores-p son inferiores a 5 %. A continuación, se presentan los resultados del análisis de estacionariedad de las variables financieras. Las pruebas Dickey-Fuller Aumentada (ADF) y Phillips-Perron (PP) indican que el *t-estadístico* es menor que el valor crítico (-3.4318, -2.8620 y -2.5671 para ADF y PP, respectivamente) en todos los casos, con *valor - p* por debajo del 5 %. Se rechaza la hipótesis nula, confirmando así la estacionariedad de las series y la ausencia de raíz unitaria.

En la última iteración, el algoritmo completó con 13 iteraciones y obtuvo el vector óptimo. La Tabla 2 muestra que desde la ejecución número 47, la prueba KS no rechaza la hipótesis H_0 , debido a que $h_i = 0$ y los *valor - p* son mayores al 5 %. La validación mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov respalda la afirmación de que los rendimientos reales y estimados comparten la misma distribución de probabilidad. Este resultado robustece la confianza en los parámetros derivados del modelo Heston-Hull-White, asegurando la fiabilidad en la obtención de precios teóricos para opciones *Call* y *Put*.

En cuanto a la volatilidad, se obtuvieron $\lambda = 0,2550$ y $\sigma = 0,0410$, para la volatilidad de la divisa

Tabla 2. *Parámetros estimados del modelo de Heston-Hull-White.*

MODELO DE HESTON-HULL-WHITE									
Periodo 14/04/2003-09/11/2018									
Diarios									
No. de réplica	1	2	3	4	...	47	48	49	50
α	0.5130	0.0138	0.0143	0.0142		0.0186	0.0186	0.0186	0.0186
σ	0.2907	0.2934	0.2944	0.2973		0.4102	0.4095	0.4095	0.4095
κ	5.4216	5.4714	5.5136	5.5237		7.5226	7.5226	7.5226	7.5226
ρ	0.0012	0.0012	0.0012	0.0013		0.0014	0.0014	0.0014	0.0014
λ	0.2108	0.2093	0.2109	0.2108		0.2550	0.2550	0.2550	0.2550
θ	-0.0810	-0.0817	-0.0824	-0.0818		-0.1080	-0.1087	-0.1087	-0.1087
η	0.0149	0.0151	0.0147	0.0147		0.0144	0.0144	0.0144	0.0144
$\Psi(x_n)$	0.4	0.3	0.3	0.5		0.99	0.99	0.99	1
Finaliza si es igual a 1	0	0	0	0		0	0	0	1
No. iteraciones internas	393	415	395	374		160	159	162	13
No. de evaluaciones de la función objetivo	1400	1406	1406	1400		1403	1407	1403	116
h_v valor-p	1, 7.18E-11	1, 3.82E-12	1, 2.580E-05	1, 7.54E-09		0, 0.479	0, 0.679	0, 0.758	0, 0.807

y los diferenciales en las tasas de interés, respectivamente. La mayor varianza en la volatilidad del activo subyacente sugiere una mayor probabilidad de que el precio de las opciones suba, especialmente en OTM (fuera del dinero). El parámetro $\rho = 0,0014$ indica una correlación directa y débil entre los rendimientos del activo subyacente y los diferenciales en las tasas de interés domésticas y extranjeras.

En suma, los parámetros estimados del modelo Heston-Hull-White muestran consistencia en todos los periodos analizados. Esta consistencia proporciona confianza en la valoración de la prima de opciones sobre tipo de cambio, permitiendo tomar decisiones informadas al posicionar estratégicamente en el mercado de derivados. Específicamente, las opciones sobre tipo de cambio se destacan como instrumentos de cobertura contra eventos adversos en el mercado cambiario.

A continuación, se obtienen los precios de las opciones *Call* y *Put* mediante el modelo Heston-Hull-White. Estas primas teóricas se compararán con las del MexDer, ofreciendo un análisis detallado de la eficacia y precisión del modelo en la valoración de opciones en el contexto financiero actual.

Se puede apreciar en las Figuras 2, 3, 4 y 5 que subvalora los precios de la opción *Call* OTM³ (lo cual no es conveniente comprar ya que el precio del activo subyacente es más elevado que el de ejercicio y no generará beneficios) y *Put* ITM (conviene ejercer la venta porque el precio del subyacente es menor al de ejercicio, y habrá ganancias) y los sobrevalora para opciones *Call* ITM (en donde es pertinente comprar porque el precio del activo subyacente es mayor al de ejercicio, recibirá rendimientos) y *Put* OTM⁴ (no vender porque el precio subyacente es mayor al precio de ejercicio y habrá pérdida) (Figura 3

³Un *Call* OTM se refiere cuando el precio subyacente es menor al precio de ejercicio, es decir, la operación no generaría beneficios. *Call* ITM es cuando el precio subyacente es mayor al precio de ejercicio, esto implica que dicha opción puede ser ejercida obteniendo beneficios. *Call* ATM es cuando el precio subyacente es aproximadamente igual al precio de ejercicio, este tipo de opciones no genera beneficio ni pérdidas significativas [42].

⁴Un *Put* OTM se tiene cuando el precio subyacente es mayor al precio de ejercicio, es decir, la operación no generaría beneficios. *Put* ITM es cuando

y 4). La dimensión de los errores oscila entre el 11.79 % en el caso de las opciones *Call* fuera-del-dinero (OTM) con un vencimiento más prolongado y un modesto 2.05 % para las opciones con vencimiento más cercano. En cuanto a las opciones *Put*, el comportamiento del error es similar al observado en las opciones *Call*, con un pico alcanzando el 8.71 %. Estos resultados revelan la variabilidad en la precisión de la valoración del modelo, destacando diferencias significativas según el tipo de opción y el tiempo hasta su vencimiento.

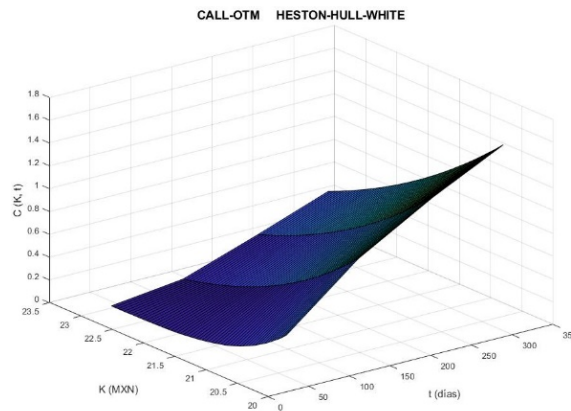


FIGURA 2. Precio de la opción *Call* OTM (fuera-del-mercado). Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

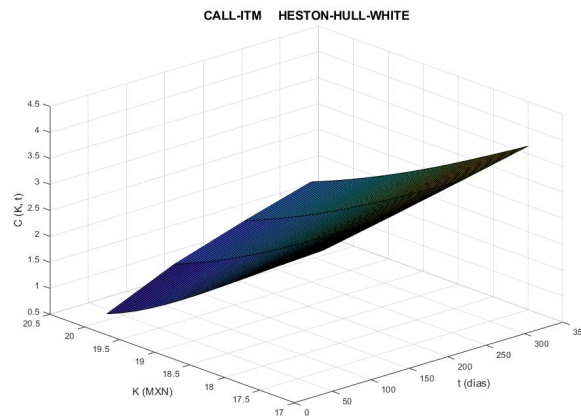


FIGURA 3. Precio de la opción *Call* ITM (dentro-del-mercado). Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

el precio subyacente es menor al precio de ejercicio, en conveniente ejercer la opción, habría rendimientos. *Put* ATM es cuando el precio subyacente es aproximadamente igual al precio de ejercicio, este tipo de opciones no genera beneficio ni pérdidas significativas [42].

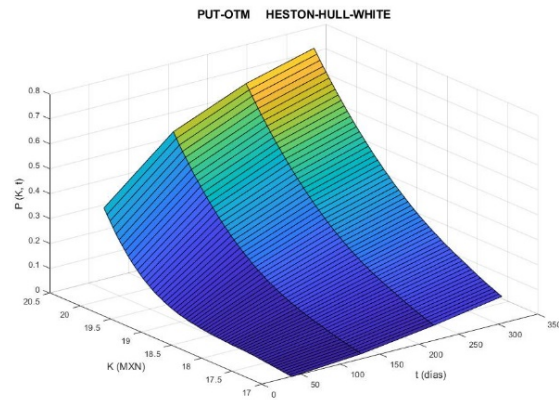


FIGURA 4. Precio de la opción Put OTM (fuera-del-mercado). Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

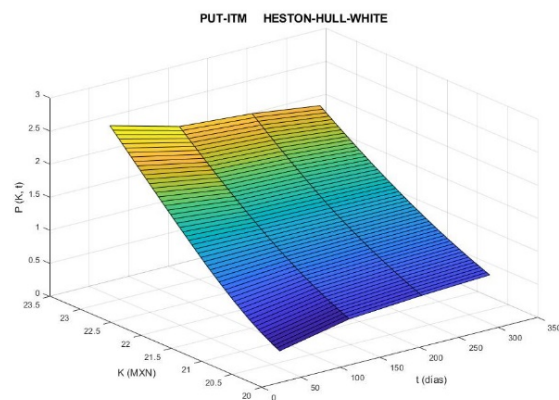


FIGURA 5. Precio de la opción Put ITM (dentro-del-mercado). Fuente: Elaboración propia con datos de DataStream.

El modelo Heston-Hull-White se erige como una herramienta confiable para la evaluación de las primas de opciones europeas sobre divisas, al abordar de manera integral múltiples factores de riesgo, tales como el tipo de cambio, la volatilidad y las tasas de interés, cuando estos exhiben comportamientos estocásticos. Es crucial resaltar que, hasta la fecha, los estudios teóricos que consideran tres factores son escasos, como el trabajo de vanHaastrecht y Lord [23], que logra, mediante un modelo de forma cerrada, valorar con precisión opciones sobre tipo de cambio incorporando volatilidad y tasas de interés estocásticas, obteniendo primas más justas para vencimientos más prolongados. Otros estudios teóricos, como los de Grzelak y Oosterlee [25], Haentjens y Hout [28], Hendricks [33] y Ullah [34], sugieren de manera general que la exactitud de los precios teóricos en comparación con los de mercado es mayor con los modelos Heston-Hull-White en contraste con el modelo de Heston [1]. Este descubrimiento se reafirma en el presente estudio, aplicado a una divisa exótica (MXN/USD).

CONCLUSIONES

La administración de riesgos se ha consolidado como un elemento esencial en los mercados financieros, especialmente en el ámbito de los derivados, concebidos como herramientas destinadas a la diversificación del riesgo entre los participantes del mercado. Los derivados financieros, en especial las opciones, proporcionan la capacidad de reducir o transferir el riesgo inherente en las posiciones de mercado a aquellos dispuestos a asumirlo, con la expectativa de obtener rendimientos superiores. Dada la creciente globalización de los mercados y la dinámica en las actividades de importación, exportación e inversión extranjera, las empresas se ven continuamente expuestas al riesgo cambiario debido a las transacciones diarias que llevan a cabo.

Por lo anterior, las opciones sobre tipo de cambio se presentan como instrumentos de cobertura esenciales para las empresas, permitiéndoles gestionar los riesgos asociados a las fluctuaciones en el precio de la divisa con la que realizan sus operaciones. Los exportadores, al usar opciones, pueden proteger sus cuentas por cobrar, mientras que los importadores cubren sus pagos futuros ante posibles incrementos inesperados en el tipo de cambio. Asimismo, estas opciones ofrecen una herramienta valiosa para la gestión de carteras de inversión y la protección contra cambios inesperados en las tasas de interés.

Los Bancos Centrales, como actores clave en el ámbito financiero, han demostrado un interés significativo en el mercado de derivados, especialmente para manejar de manera eficiente la política monetaria. En situaciones de crisis económica o financiera, el Banco Central puede usar opciones como un instrumento estabilizador del mercado cambiario, evitando la necesidad de utilizar reservas internacionales y mitigando los daños en la política monetaria. De esta manera, los derivados financieros desempeñan un papel crucial al proporcionar flexibilidad y estabilidad al mercado cambiario.

En síntesis, la disponibilidad de instrumentos de cobertura que contemplen factores macroeconómicos,

tales como el tipo de cambio, las tasas de interés domésticas y extranjeras, junto con la volatilidad en un contexto estocástico, asegura una disminución efectiva de la exposición al riesgo de mercado cambiario para todos los agentes financieros y no financieros.

REFERENCIAS

- [1] S. L. Heston, “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *Review of Financial Studies*. Vol. 6, No. 2, pp. 327-343, 1993.
- [2] J. Hull, and A. White. “Pricing Interest-Rate-Derivative Securities,” *Review of Financial Studies*. Vol. 3, No. 4, 573-592, 1990.
- [3] N. Bray, *Report of the Presidential Task Force on Market Mechanisms*. Washington, D.C. 1988.
- [4] Z. Ramírez, G. Vázquez y A. Bello. *El casino de los derivados. Expansión*. Pp. 129-140, 2008.
- [5] J. N. Bodurtha, and G. R. Courtadon, “The statistical distribution of exchange rates”. *Journal of International Economics*. Vol. 22, pp. 297-319, 1987.
- [6] A. Melino, and S. Turnbull, The Pricing of Foreign Currency Options, *Canadian Journal of Economics*. Vol. 24, 455-480, 1991.
- [7] J. Hull, and A. White, “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities,” *Journal of Finance*, 42, No. 2, 281-300, 1987.
- [8] E. M. Stein, and J. C. Stein, “Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach,” *Review of Financial Studies*. Vol. 4, 727-752, 1991.
- [9] R. Schöbel, and J. Zhu, “Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: An extension,” *European Finance Review*, No. 4, 23–46, 1999.
- [10] O. Vasicek, “An equilibrium characterization of the term structure,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, 177-188, 1997.
- [11] K. S. Miltersen, and D. Sondermann, “Closed-form solutions for term structure derivatives with lognormal interest rates,” *Journal of Finance*, Vol 52, 409–430, 1997.
- [12] Brace, D. Gatarek, and M. Musiela, “The market model of interest rate dynamics,” *Mathematical Finance*, Vol. 7, 127-155, 1997.

- [13] J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross, “A theory of the term structure of interest rates,” *Econometrica*, Vol. 53, 385-407, 1985.
- [14] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton, “Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology,” *Econometrica*, Vol. 60, 77-105, 1992.
- [15] J. Hull, and A. White, “One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 28, No. 2, 235-253, 1993.
- [16] J. K. Hunt, and A. Pelsser, “Markov functional interest rate models. *Finance and Stochastics*”, Vol. 4, 391–408, 2000.
- [17] D. Brigo, and F. Mercurio, “Interest rate models. Theory and practice,” *Springer Finance*, 2007.
- [18] R. Ahlip, “Foreign exchange options under stochastic volatility and stochastic interest rates,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 11, No. 3, 277–294, 2008.
- [19] L. O. Scott, “Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimators and, applications,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, 419–438, 1997.
- [20] C. Bakshi, C. Cao, and Z. Chen, “Empirical performance of alternative option pricing models,” *The Journal of Finance*, Vol. 52, pp. 2003-2049, 1997.
- [21] K. I. Amin, and V. K. Ng, “A comparison of predictable volatility models using option data,” *Research Department working paper*, International Monetary Fund, 1994.
- [22] T. G. Andersen, “Closed form pricing of FX options under stochastic rates and volatility,” *Presentation at Global Derivatives Conference*, Paris, 2006.
- [23] R. vanHaastrecht, and A. Lord, “Pricing long-dated insurance contracts with stochastic volatility and stochastic interest rates,” *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 45, No. 3, 2009.
- [24] Lord and J. Kahl, “Optimal Fourier inversion in semi-analytical option pricing,” *Journal of Computational Finance*, Vol. 10, No. 4, 2008.
- [25] L. Grzelak, and C. W. Oosterlee, “On the Heston Model with stochastic Interest Rates,” *Munich Personal RePEc Archive*, 2010.
- [26] Carr, and D.B. Madan, “Option valuation using the fast Fourier transform,” *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, 61–73. 1999.

- [27] F. Fang, and C. W. Oosterlee, “A Novel Pricing Method for European Options Based On Fourier-Cosine Series Expansions,” Munich Personal RePEc Archive, 2008.
- [28] T. Haentjens, and K. J. Hout, “ADI finite difference schemes for the Heston-Hull-White PDE,” The Journal of Computational Finance, Vol 16, pp. 83-110, 2012.
- [29] T. Haentjens, “ADI FD Schemes for the Numerical Solution of the Three-dimensional Heston–Cox–Ingersoll–Ross PDE,” Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM, Vol. 1479, pp. 2195-2199, 2012.
- [30] W. Anthonie, van del Stoep, L. Grzelak and C. Oosterlee, “A Novel Monte Carlo Approach to Hybrid Local Volatility Models,” Quantitative Finance, Vol. 00, No. 00, pp. 1-31, 2016.
- [31] a. W. Van der Stoep, L. A. Grzelak, and C. W. Oosterlee, “The Heston Stochastic-Local Volatility Model: Efficient Monte Carlo Simulation,” International Journal of Theoretical and Applied Finance, No. 17, 2014.
- [32] A. Cozma, and C. Reisinger, “A mixed Monte Carlo and PDE variance reduction method for foreign exchange options under the Heston-CIR model,” Working paper, arXiv:1509.01479v3 [q-fin.CP], 2016.
- [33] C. Hendricks, M. Ehrhardt, and M. Günther, “Hybrid finite difference/pseudospectral methods for the Heston and Heston-Hull-White PDE,” Journal of Computational Finance, Vol. 21, No 5, pp. 1-33, 2018.
- [34] M. Z. Ullah, “Numerical Solution of Heston-Hull-White Three-Dimensional PDE with a High Order FD Scheme,” Mathematics, No. 7, 2019.
- [35] Y. Liang, and C. Xu, “An Efficient Conditional Monte Carlo Method for European Option Pricing with Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rate,” International Journal of Computer Mathematics, Vol. 97, No. 3, pp. 638-655, 2019.
- [36] F. Soleymani, and B. Nemati. “Pricing the financial Heston–Hull–White model with arbitrary correlation factors via an adaptive FDM,” Computers and Mathematics with Applications, Vol. 77, No. 4, pp. 1107-1123, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.047>. 2019.
- [37] T. Liu, M.Z. Ullah, S. Shateyi, C. Liu, and Y. Yang. “An Efficient Localized RBF-FD Method to Simulate the Heston-Hull-White PDE in Finance,” Mathematics. Vol. 11, pp. 833, <https://doi.org/10.3390/math11040833>. 2023.

- [38] J. A. Nelder, and R. Mead, “A simplex method for function minimization,” *Computer Journal*, No. 7, pp. 308–313, 1965.
- [39] F. Black, and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*. Vol. 81, pp. 637-65, 1976.
- [40] S. E. Shreve, “Stochastic Calculus for Finance II,” Springer, 2004.
- [41] Y. M. Lin, N. Strong, and X. Xu. “Pricing FTSE 100 Index Options Under Stochastic Volatility,” *Journal of Futures Markets*, No. 21, pp. 197-211. 2011.
- [42] J. C. Hull, *Options, Futures and Other Derivates*, Pearson, Prentice Hall, Toronto. pp. 822. 2008.
- [43] M. L. Najera, “Valuación del precio de opciones europeas sobre la relación peso mexicano/dólar estadounidense para el periodo 2004-2018”, Tesis Doctoral, Repositorio Institucional UAEMéx, <http://ri.uaemex.mx/handle/20.500.11799/110164>. 2020.