

Ajuste multilinear de la ley de ablandamiento en análisis lineales secuenciales para la aproximación del comportamiento no-lineal de estructuras

Multilinear softening-law fitting in sequentially linear analysis for approximation of nonlinear behaviour of structures

Amezcu Rivera, H.R.^{1*} , Ayala Milián, A.G.² , González Calva, C.E.² , Lagunas Muñoz, J.A.²
(*rodrigo_amezcua@comunidad.unam.mx)

Recibido: 30-04-2024 Aceptado: 08-06-2024

RESUMEN

Generalmente, la ley de ablandamiento de un material cuasi-frágil no se considera como un parámetro importante al momento de seleccionar el modelo matemático a emplear para la ejecución de un análisis no-lineal de una estructura y/o elemento estructural elaborado con dicho material. Sin embargo, es de esperarse que el ablandamiento de un material en particular no siempre sea igual, especialmente si consideramos a los materiales compuestos elaborados *in-situ* y/o que dependen de componentes cuyo origen y, en consecuencia, sus características pueden ser muy diversas, *e.g.*, el concreto y la mampostería. Uno de los modelos numéricos que ha demostrado ser computacionalmente eficiente en la aproximación del comportamiento no-lineal de estructuras, elaboradas con materiales cuasi-frágiles, consiste en la ejecución de análisis lineales secuenciales. Originalmente, en este modelo se asume una

ley de ablandamiento lineal y ha sido modificado por otros autores que han propuesto otras formas, independientemente de ello, la forma de la ley de ablandamiento que se elija deberá ser la misma en cada aplicación del modelo. Por esta razón, en este trabajo se presenta una modificación al modelo de análisis lineales secuenciales para que la ley de ablandamiento se ajuste mediante aproximación multilinear a cualquier forma, *e.g.*, la obtenida mediante un experimento. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que la aproximación al comportamiento no-lineal experimental de una prueba de tres puntos de flexión mejora considerablemente con el ajuste propuesto.

Palabras clave: análisis lineales secuenciales, análisis no-lineal, ley de ablandamiento.

¹Facultad de Ingeniería, UNAM, Ciudad de México, 04510, México.

²Instituto de Ingeniería, UNAM, Ciudad de México, 04510, México.



ABSTRACT

The softening law of a quasi-brittle material is generally not considered a significant parameter when selecting the mathematical model to employ for performing a nonlinear analysis of a structure and/or structural element made with such a material. However, it is expected that the softening of a particular material may not always be the same, especially when considering *in-situ* composite materials and/or those dependent on components for which origin and, consequently, characteristics can vary greatly, *e.g.*, concrete and masonry. One of the numerical models that has proven to be computationally efficient in approximating the nonlinear behaviour of structures made with quasi-brittle materials is the execution of sequentially linear analysis.

Originally, this model assumes a linear softening law and despite it has been modified by other authors to consider other forms, the softening law is always a fixed parameter in this model. For this reason, this work presents a modification to the model of sequentially linear analysis so that the softening law can be adjusted through multilinear approximation to any form, *e.g.*, that obtained through an experiment. The results obtained in this work show that the approximation to the experimental nonlinear behaviour of a three-point bending test is considerably improved with the proposed adjustment.

Keywords: sequentially linear analysis, nonlinear analysis, softening law.

INTRODUCCIÓN

Cada vez es más común que los ingenieros especialistas en estructuras consideren, dentro de sus tareas cotidianas en el proceso de análisis y diseño estructural, que los elementos de una estructura pueden dañarse ante ciertas demandas como, por ejemplo, las generadas por un sismo o por la acción del viento. Esto se hace evidente al observar que la admisión del daño en las estructuras es parte fundamental en el desarrollo de filosofías de diseño estructural desde hace algunas décadas como las basadas en desplazamientos [1], en energía [3] y en resiliencia [4].

Una de las implicaciones que tiene el considerar que los elementos estructurales pueden experimentar daño para cierto nivel de demanda, es que convierte al problema matemático de análisis estructural en un problema no-lineal, en el que los principios de superposición y homogeneidad dejan de ser válidos cuando inicia el daño, *e.g.*, aparición de grietas y/o deformaciones permanentes. Esto involucra necesariamente el empleo de un modelo matemático que permita aproximar la solución del problema no-lineal.

Dependiendo de la cantidad de hipótesis simplificadoras del problema que se consideren en el modelo numérico, estos pueden ser complejos o muy simples. Una elección adecuada de un modelo numérico debe considerar esencialmente el objetivo del problema a resolver y la disponibilidad de los recursos humanos, computacionales y hasta económicos. Adicionalmente, debe existir un equilibrio, ya que un modelo exageradamente simplificado, aunque sea muy sencillo de analizar, no proveerá resultados que se correspondan con la realidad.

El uso de un modelo numérico complejo con pocas hipótesis simplificadoras y que contemple una cantidad importante de fenómenos físicos interactuando en un mismo problema tiene la desventaja de requerir recursos computacionales altos y, adicionalmente, recursos humanos con la formación suficiente tanto para la generación del modelo como para la interpretación de los resultados. Así, el uso de modelos muy complejos genera mucho interés en actividades académicas de investigación, pero muy poco o nulo para aplicaciones prácticas de la ingeniería estructural.

Un ejemplo de modelos numéricos complejos empleados en el análisis de estructuras es el uso del Método de los Elementos Finitos (MEF) en conjunto con un modelo constitutivo *ad hoc* al material, e.g., concreto, mampostería o acero. En la actualidad, existen numerosos modelos constituidos cuya formulación, para la gran mayoría de los empleados en ingeniería estructural, está basada en la teoría de plasticidad o la teoría del daño. Así, los primeros están orientados a la aparición de deformación permanentes y los segundos a una pérdida de la rigidez inicial. También existen modelos constitutivos basados en una combinación de ambas teorías [5, 6].

Una de las estrategias que es computacionalmente eficiente para aproximar el comportamiento no-lineal de materiales cuasi-frágiles, como el concreto, consiste en la conocida como Análisis Lineales Secuenciales (ALS) que fue desarrollada por Rots [7]. Esta propuesta consiste en la ejecución de una serie de análisis lineales empleando el MEF en los que las propiedades mecánicas del material se degradan de manera secuencial. La forma en la que se degradan dichas propiedades se conoce como ley de ablandamiento y, en la propuesta original de Rots [7], esta ley es lineal.

Más adelante, otros autores propusieron el uso de una ley de ablandamiento bilineal [8] y no-lineal [9] dentro del procedimiento de ALS. Sin embargo, estas modificaciones implicaron el desarrollo de formulaciones analíticas para contar con expresiones matemáticas que permitan calcular los valores de las propiedades mecánicas para cada análisis lineal. De esta manera, se requiere el desarrollo de una nueva formulación analítica para cada ley de ablandamiento que se proponga emplear dentro del procedimiento de ALS.

En este artículo, se propone una modificación al método ALS que permite el ajuste a cualquier forma de ley de ablandamiento mediante un ajuste multilíneal. Por ejemplo, de contar con una curva de comportamiento del material obtenida mediante un experimento, este procedimiento permite encontrar una ley de ablandamiento multilíneal que se ajusta a dichos resultados experimentales.

DESCRIPCIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS LINEALES SECUENCIALES (ALS)

El procedimiento de ALS aproxima el ablandamiento característico de los materiales cuasi-frágiles en la curva de esfuerzo-deformación mediante una aproximación dentada de una ley de ablandamiento lineal (Figura 1). Según lo mostrado en la Figura 1, y de acuerdo con lo establecido por algunos autores [8, 10], es previsible que la formulación original de ALS subestime el área bajo la curva esfuerzo-deformación del material. Por esta razón, Rots e Invernizzi [10] mejoraron la formulación de ALS, proponiendo un procedimiento de regularización de malla con el que buscan disminuir su influencia. Esta propuesta considera un factor que escala tanto la resistencia a tensión como la deformación última del material en cuestión.

La aplicación de ALS consiste en la ejecución sucesiva de análisis con comportamiento elástico-lineal para el material en los que se degrada la rigidez del elemento más demandado mediante la disminución de su módulo de elasticidad, E , y su resistencia a tensión, f , siguiendo la ley de ablandamiento lineal (Figura 1) [8]. Este procedimiento continúa hasta que los elementos donde se espera que ocurra el daño llegan valores de rigidez residual muy cercanos a cero [8].

Etapas 1: Construcción del modelo matemático

De acuerdo con la Figura 2, el procedimiento inicia con la etapa 1 que corresponde a la construcción del modelo de elementos finitos que incluye la discretización de la estructura empleando elementos fini-

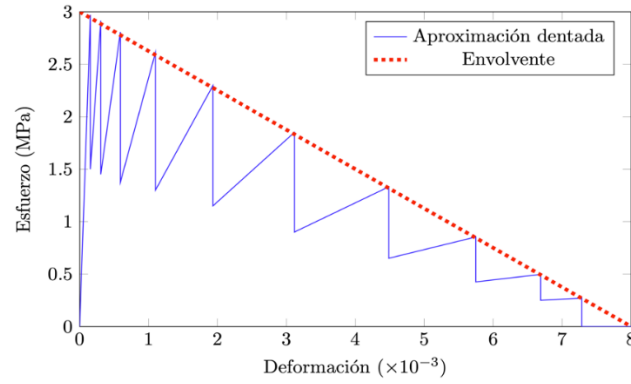


Figura 1: Aproximación dentada de una ley de ablandamiento lineal para la aplicación de ALS [8].

tos sólidos y asignando las cargas como unitarias. Posteriormente, estas cargas se escalarán en la etapa 2. En la propuesta original de Rots [7], estos elementos son cuadriláteros de aproximación lineal para aplicar integración reducida (IR) considerando una cuadratura de 1x1 en los elementos donde se asume que se presentará el daño de acuerdo con lo observado experimentalmente y/o en estructuras similares. Adicionalmente, se asignan los parámetros para el análisis como módulo de elasticidad, relación de Poisson, resistencia a tensión, energía de fractura y ancho de grieta.

Etapla 2: Ejecución de análisis lineales

La etapa 2 consiste en la ejecución de los análisis lineales de manera secuencial, considerando un comportamiento de esfuerzo plano. Posteriormente, se identifica el elemento para el cual el esfuerzo principal de tensión, σ_{tt} , es el más cercano a su resistencia a tensión actual, f_t , *i.e.*, elemento crítico. Posteriormente se calcula el factor de escala, λ , de acuerdo con lo establecido en la Ec. (1).

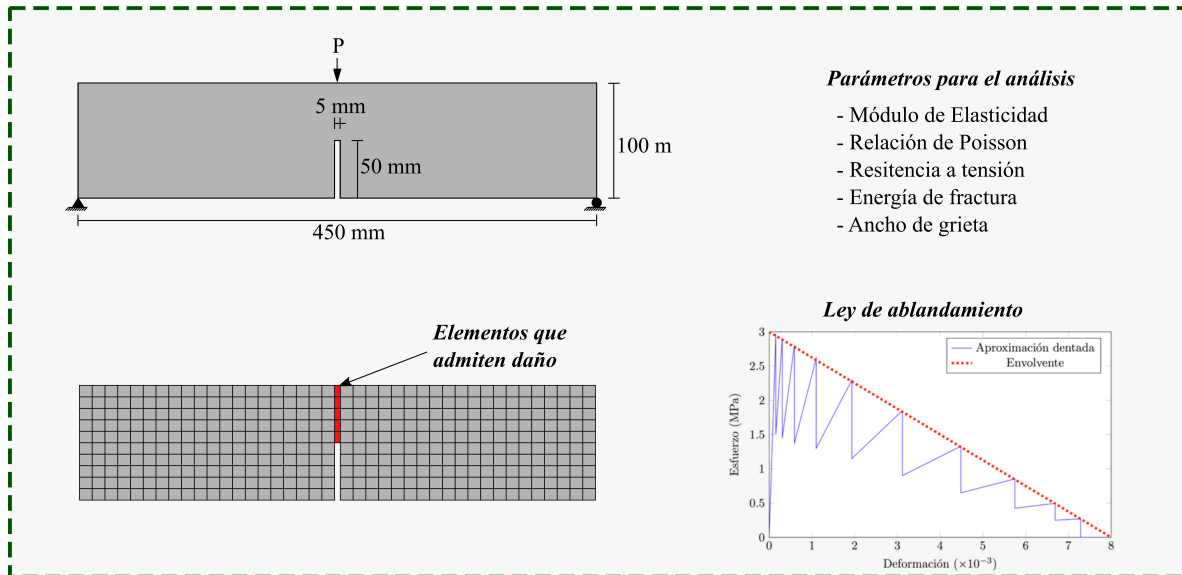
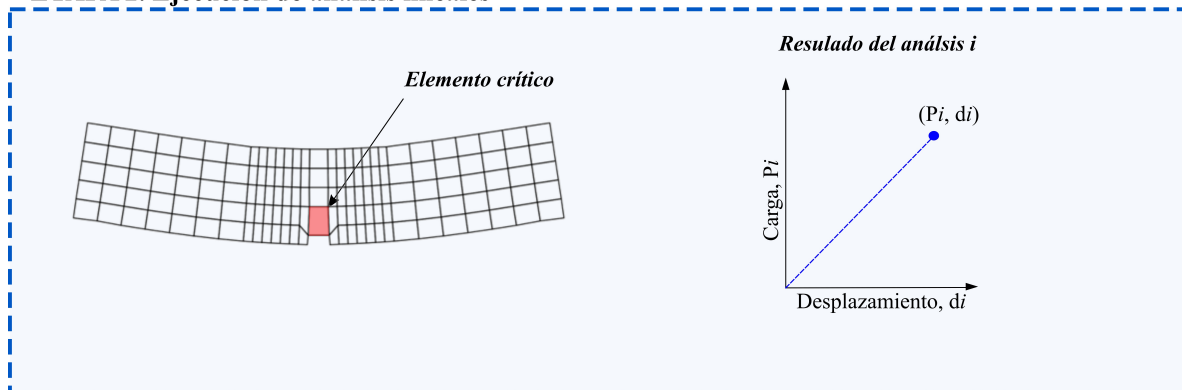
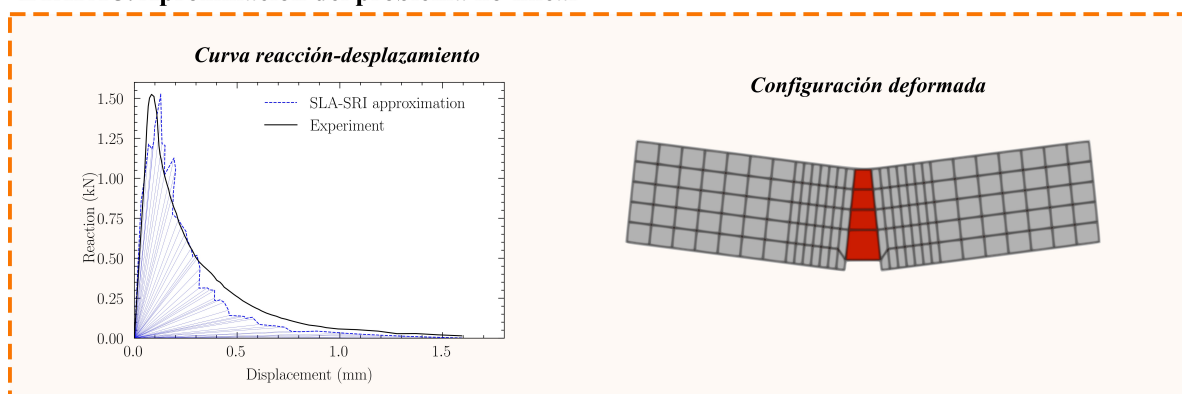
$$\lambda = \frac{f_t}{\sigma_t} \quad (1)$$

A continuación, se escala la carga unitaria asignada en la etapa 1 empleando el factor λ . A esta carga escalada se le conoce como la carga crítica global, P_i , y, además, se determina su desplazamiento global correspondiente, d_i . Finalmente, se reducen el módulo de elasticidad y la resistencia a tensión del elemento crítico de acuerdo con la ley de ablandamiento lineal (Figura 1), utilizando las Ecs. (2) y (3), respectivamente.

$$E_i = \frac{E}{a^i} \quad (2)$$

$$f_{ti} = \epsilon_0 E_i \left(\frac{D}{E_i + D} \right) \quad (3)$$

En estas ecuaciones, el sufijo i indica el número de análisis, a es un factor calculado en función del número de veces que un mismo elemento puede ser seleccionado como elemento crítico, *i.e.*, número de dientes. Por ejemplo, Rots [7] sugiere valores de a iguales a 4, 2, y $\sqrt{2}$ para 5, 10 y 20 dientes. Finalmente, ϵ_0 es la deformación última y D es la tangente del diagrama de la Figura 1 calculado con la Ec. (4).

ETAPA 1. Construcción del modelo de elementos finitos**ETAPA 2. Ejecución de análisis lineales****ETAPA 3. Aproximación del problema no-lineal**Figura 2: *Procedimiento de ALS.*

$$D = \left(\frac{f_t}{\epsilon_0 - \left(\frac{f_t}{E} \right)} \right) \quad (4)$$

Esta etapa se repite con la estructura en la que el módulo de elasticidad y la resistencia a tensión del elemento crítico fueron reducidos.

Etapa 3: Aproximación del problema no lineal

La etapa 3 consiste en aproximar el problema no-lineal construyendo la curva reacción-desplazamiento con todas las configuraciones encontradas en la etapa anterior (P_i, d_i). En caso de requerirse, es posible trazar la configuración deformada que, según Rots e Invernizzi [10], revela la ubicación de la fractura, ya que los elementos críticos degradados presentarán las deformaciones más grandes en relación con el resto de los elementos. Es muy importante tener presente que el resultado de este método depende de la forma en que se reduce progresivamente la rigidez y la resistencia del elemento crítico, es decir, de la ley de ablandamiento. Por esta razón, en el presente trabajo se propone un procedimiento para que el procedimiento de ALS se ajuste para considerar cualquier ley de ablandamiento.

USO DE INTEGRACIÓN REDUCIDA ESTABILIZADA (IRE)

Es común emplear técnicas de integración numérica para calcular la matriz de rigidez, $\mathbf{K}$, en la formulación isoparamétrica de un elemento finito cuadrilátero (Ec. (5)). En esta ecuación, t es el espesor del elemento, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son las matrices de compatibilidad y constitutiva para un comportamiento de esfuerzo plano o deformación plana, respectivamente. x y y son las coordenadas del espacio físico real, ξ y η son las coordenadas del sistema natural de referencia y $|\mathbf{J}|$ es el jacobiano de la transformación. Los términos ξ_i, η_j y w_i, w_j corresponden a los puntos de muestreo y a los pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre empleada para el proceso de integración numérica, respectivamente [8]. Particularmente, para el elemento finito cuadrilátero de aproximación lineal, se identifican un esquema de integración completa (IC) cuando se usa una cuadratura de 2×2 y un esquema de integración reducida (IR) cuando se emplea una cuadratura de 1×1 (Figura 3). Como se mencionó en la sección anterior, en ALS se emplea IR en los elementos donde se asume que se presentará el daño.

$$\mathbf{K} = t \int_A \overbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}}^{\varphi(x,y)} dA \approx t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(\xi_i, \eta_j) |\mathbf{J}| w_i w_j \quad (5)$$

El empleo de IR puede generar inestabilidades numéricas como el llamado efecto “reloj de arena” (efecto *hourglass*). Este efecto es notorio en la aparición de modos de deformación inconsistentes que presentan deformación con energía de deformación nula [8]. Por lo tanto, la selección de un orden de cuadratura adecuado es de suma importancia en la ejecución de análisis no lineales mediante el MEF. En otras palabras, para aprovechar el uso de la integración reducida (IR), es necesario implementar un procedimiento de control del efecto *hourglass* o de estabilización.

Amezcu y Ayala [11] propusieron el uso de un esquema de integración reducida estabilizada (IRE) en el elemento cuadrilátero de 4 nodos. Este algoritmo de estabilización conduce a una atractiva reducción del costo computacional y se basa en la recuperación del rango de la matriz de rigidez sub-integrada, $\mathbf{K}_{(1)}$, mediante la adición de una matriz de rigidez estabilizadora, $\mathbf{K}_s$ (Ec. (6)).



Figura 3: *Elemento finito sólido de aproximación lineal (a) integración completa y (b) integración reducida.*

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{(1)} + \mathbf{K}_s = t \mathbf{A} \mathbf{B}_{(1)}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{(1)} + \mathbf{K}_s \quad (6)$$

En la Ec. (6) el sufijo 1 indica que las correspondientes matrices ya fueron evaluadas empleando un solo punto de integración. Posteriormente, Amezcua y Ayala [8] aplicaron el procedimiento de ALS a través de este esquema IRE. Este procedimiento combinado ALS-IRE presenta algunas ventajas interesantes como la posibilidad de utilizar la integración reducida sobre todos los elementos de cierta malla y no sólo sobre aquellos en los que se espera que se produzca daño. Esto, a su vez, contribuye a la estabilidad numérica del método ALS original que, para ciertas configuraciones de malla, puede conducir a la aparición de matrices de rigidez singulares. En este artículo se emplea este procedimiento ALS-IRE y se mejora para que, en lugar de usar una sola ley de ablandamiento con una forma preestablecida, se realice un ajuste multilíneal a cualquier forma de ley de ablandamiento.

AJUSTE MULTILINEAL DE LA LEY DE ABLANDAMIENTO

Comúnmente, la forma de la curva esfuerzo-deformación del concreto en su fase inelástica no suele considerarse como una característica significativa del material para la ejecución de un análisis no-lineal. Esto puede llevar a asumir la idoneidad de ciertos modelos constitutivos sin revisar si la ley de ablandamiento, considerada en su formulación, coincide con el comportamiento observado experimentalmente. En la actualidad, se sabe que, en función de datos experimentales, mientras que algunos concretos presentan una rama de ablandamiento que se puede aproximar de manera lineal hay otros que se ajustan mejor a una relación bilíneal o no-lineal [8].

Algunos autores [8,11] han mostrado que modificar la forma de la ley de ablandamiento considerada en ALS puede conducir a resultados que son más cercanos a los observados en experimentos tanto en la relación reacción-desplazamiento como en la secuencia de la formación de grietas y propagación de estas. En consecuencia, resulta atractiva la consideración de distintas formas de la ley de ablandamiento. Uno de los inconvenientes de modificar la ley de ablandamiento es que, para cada modificación, es necesario realizar una nueva formulación que permita encontrar las expresiones analíticas que permitan la degradación de los parámetros mecánicos del material (ver Ec. (2) y Ec. (3)).

El empleo de IRE en el procedimiento de ALS permite que las matrices de las rigideces de los elementos que componen la malla sean de rango 5, *i.e.*, se necesitan restringir cuando menos 3 grados de libertad, cumpliendo con condiciones de estabilidad para obtener una solución única. Así, es posible ana-

lizar un elemento integrado con IRE con una configuración de cargas que genere un estado de tensión para que imite la forma de cierta ley de ablandamiento (Figura 4).

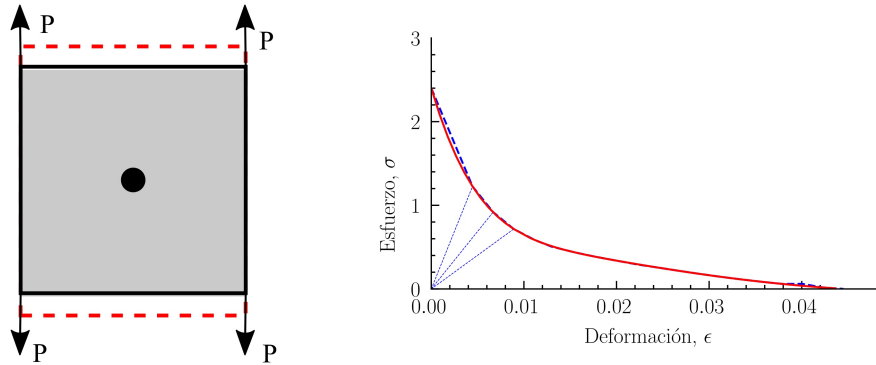


Figura 4: Esquema de un elemento finito de aproximación lineal resuelto con IRE empleado para el ajuste multilíneal de una ley de ablandamiento.

Siguiendo el procedimiento de la Figura 2, se analiza el elemento de la Figura 4. Para cada análisis lineal, se calculan las propiedades mecánicas (módulo de elasticidad y la resistencia a tensión) del elemento de tal manera que la carga y el desplazamiento coincidan con la forma de la curva que se está calibrando.

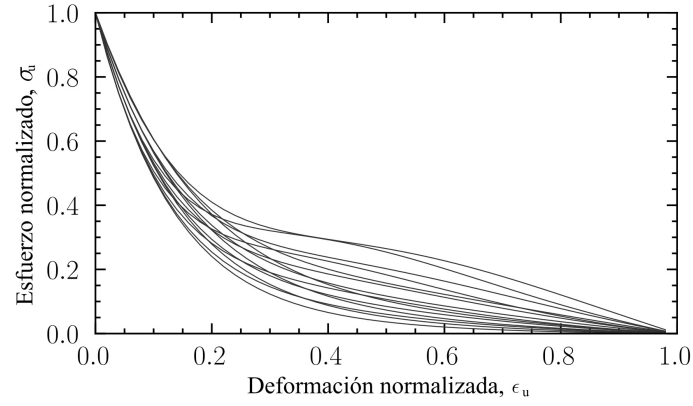
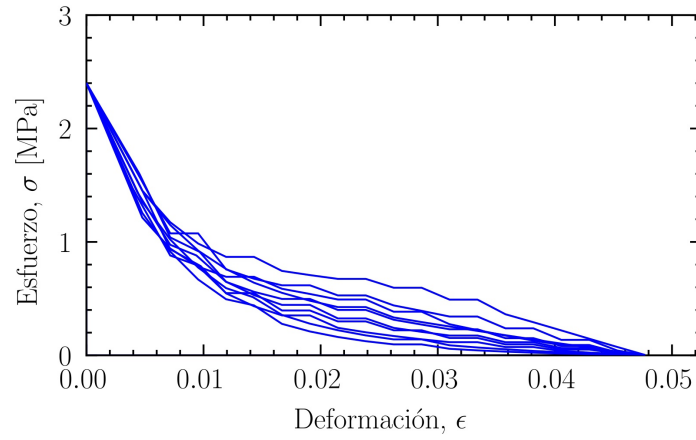
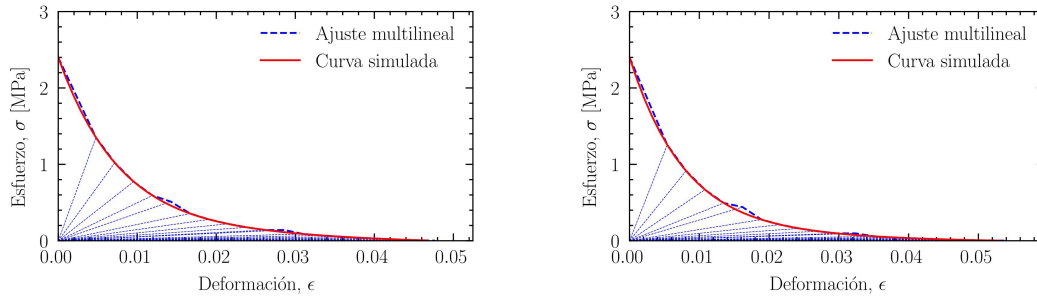
Para mostrar una aplicación del ajuste multilíneal descrito en la sección anterior, se seleccionó la ecuación propuesta por Cornelissen *et al.* [13] (Ec. (7) y Ec. (8)).

$$\frac{\sigma}{f_t} = f(\epsilon) - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} f(\epsilon = \epsilon_0) \quad (7)$$

$$f(\epsilon) = \left(1 + \left(\frac{C_1 \epsilon}{\epsilon_0} \right)^3 \right) e^{-\frac{C_2 \epsilon}{\epsilon_0}} \quad (8)$$

En estas ecuaciones, ϵ es la deformación y σ_t el esfuerzo. ϵ_0 es la deformación última del concreto. Adicionalmente, las constantes C_1 y C_2 son los coeficientes que Cornelissen *et al.* [13] calcularon para concreto normal en el estudio referido como $C_1 = 3$ y $C_2 = 6.93$. En el presente trabajo, se simuló estas dos constantes para producir un conjunto de curvas diferentes para probar el procedimiento de ajuste multilíneal propuesto. Para esta simulación, se empleó el procedimiento de Muestreo del Hipercubo Latino (MHL) para obtener un total de 10 curvas para fines de validación (Figura 5).

Para cada una de estas curvas, se realizó el ajuste multilíneal propuesto en este artículo (Figura 6). En las Figuras 7 a 11, se incluyen, de manera independiente, cada curva comparada con su correspondiente curva simulada. En estas figuras se observa un ajuste multilíneal satisfactorio de la ley de ablandamiento simulada.

Figura 5: *Curvas simuladas.*Figura 6: *Curvas con ajuste multilinear.*Figura 7: *Ejemplos de ajuste multilinear de curvas simuladas 1 y 2.*

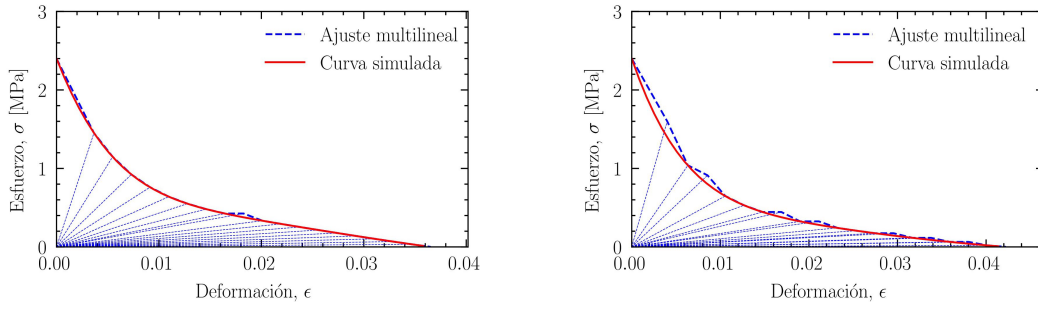


Figura 8: Ejemplos de ajuste multilinear de curvas simuladas 3 y 4.

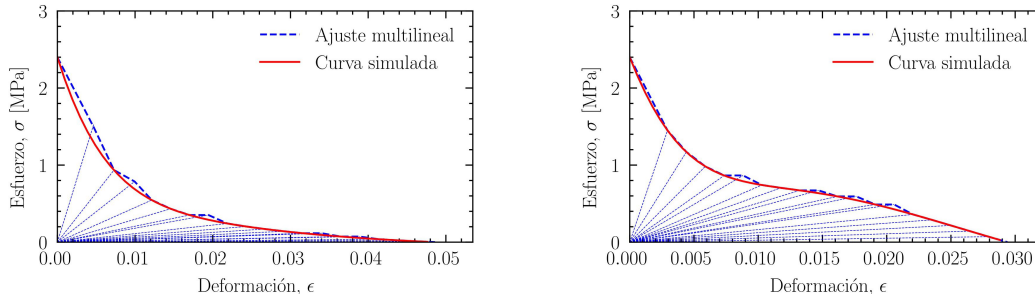


Figura 9: Ejemplos de ajuste multilinear de curvas simuladas 5 y 6.

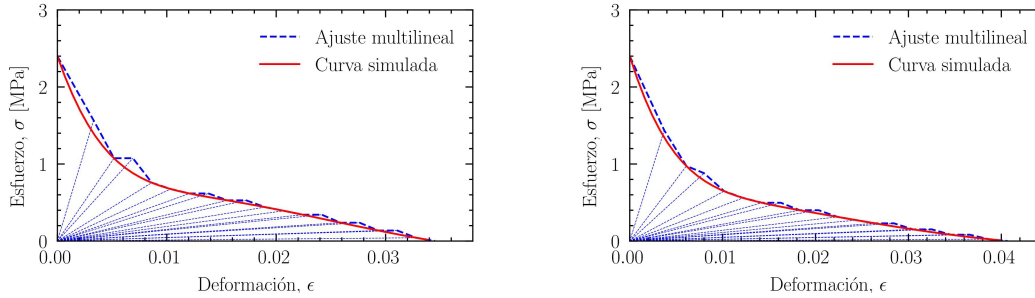


Figura 10: Ejemplos de ajuste multilinear de curvas simuladas 7 y 8.

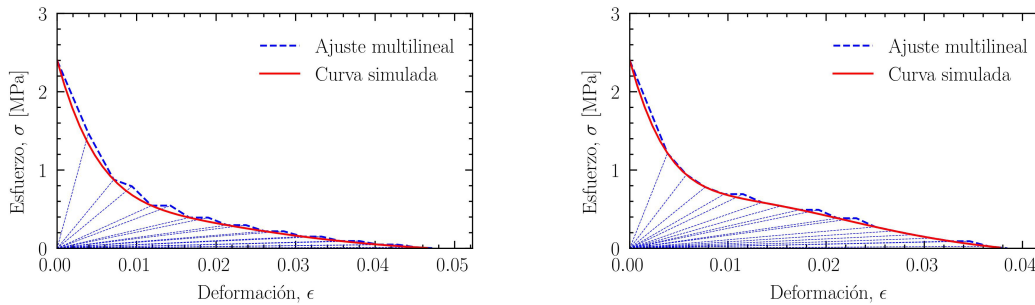


Figura 11: Ejemplos de ajuste multilinear de curvas simuladas 9 y 10.

VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA

Como ejemplo de aplicación, se seleccionó la viga con muesca de la Figura 12. Esta viga corresponde a un experimento de 3 puntos de flexión llevado a cabo por Kormeling y Reinhardt [14] en la Universidad Tecnológica de Delft. El objetivo del experimento fue determinar la energía de fractura de concreto convencional y de concreto modificado con epoxi. En este trabajo se tomaron los resultados de los experimentos correspondientes a concreto convencional para validar la propuesta.

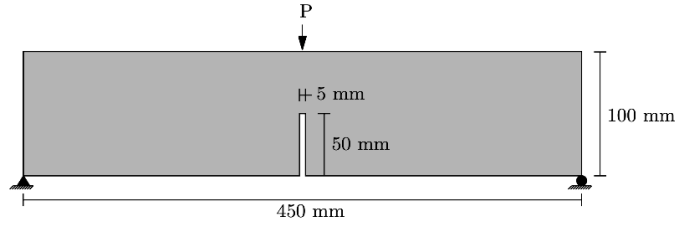


Figura 12: Geometría de la viga con muesca ensayada por Kormeling y Reinhardt [14].

Como se observa en la Figura 2, el procedimiento inicia con la construcción del modelo de elementos finitos el cual incluye la elaboración de la malla formada por elementos cuadriláteros de aproximación lineal (Figura 14) y la caracterización del material mediante sus propiedades mecánicas (Tabla 1). Adicionalmente, se considera que los elementos críticos potenciales son los que se encuentran sobre la muesca.

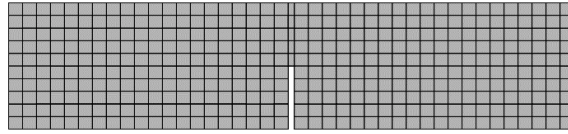


Figura 13: Malla de elementos finitos empleada en el análisis.

Tabla 1: Parámetros para el análisis

Parámetro	Magnitud y unidades
Módulo de elasticidad	$E = 20000 \text{ MPa}$
Relación de Poisson	$\nu = 0.20$
Resistencia a tensión	$f_t = 2.40 \text{ MPa}$
Energía de fractura	$G_f = 0.113 \text{ N/mm}$
Ancho de grieta	$h = 5 \text{ mm}$

Respecto de la ley de ablandamiento, se seleccionaron las Ec. (7) y Ec. (8) para los parámetros $C_1 = 3$ y $C_2 = 6.93$ propuestos por Cornelissen *et al.* [13]. Así, la ley de ablandamiento se muestra en la Figura 14. Se realizó el ajuste multilíneal con el procedimiento descrito en este trabajo y se obtuvo la degradación necesaria de los parámetros mecánicos, módulo de elasticidad y la resistencia a tensión (Tabla 2), para cada ocasión en la que un elemento resulte ser un elemento crítico (Figura 15).

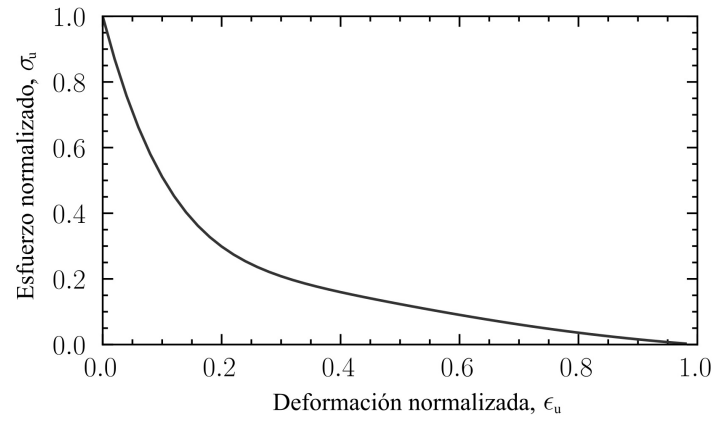


Figura 14: *Curva de ablandamiento propuesta por Cornelissen et al.*

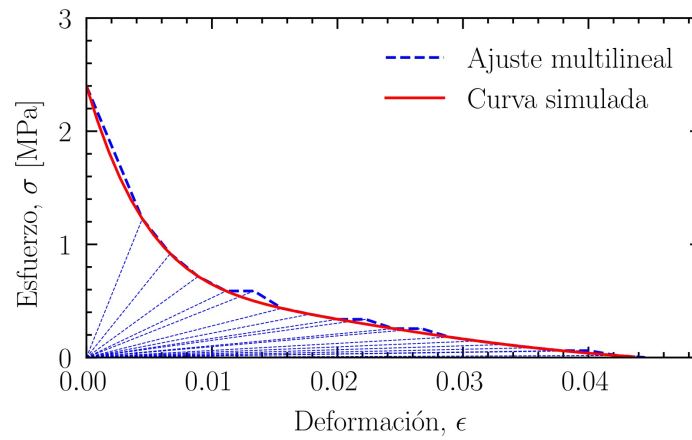


Figura 15: *Ajuste multilineal de la ley de ablandamiento.*

Tabla 2: Secuencia de degradación de propiedades mecánicas para elementos críticos

Módulo de elasticidad (MPa)	Resistencia a tensión (MPa)
20000.00	2.40
275.43	1.23
137.55	0.92
80.50	0.72
52.83	0.59
52.83	0.59
27.93	0.44
21.52	0.38
16.86	0.34
16.86	0.34
10.43	0.26
10.43	0.26
6.24	0.18
4.70	0.15
3.45	0.12
2.43	0.09
1.61	0.06
1.61	0.06
0.42	0.02
0.02	0.00

Definido el modelo de elementos finitos de la viga con muesca y el ajuste multilíneal de la curva de ablandamiento (Figura 15), se aplicó el procedimiento ALS-IRE para obtener la curva reacción-desplazamiento de la Figura 16. En esta figura se incluyen los resultados experimentales obtenidos por Kormeling y Reinhardt [14] para fines de validación. Adicionalmente, se incluyen los resultados del procedimiento ALS-IRE considerando una ley de ablandamiento lineal con y sin regularización. Aquí, se puede apreciar una mejor aproximación de la propuesta de este artículo a los resultados experimentales con respecto a ALS-IRE sin el ajuste multilíneal, lo cual es particularmente notorio en la reacción de mayor magnitud y en la evolución de esta reacción hasta un desplazamiento de 0.6 mm. La reacción máxima aproximada con la propuesta de este trabajo es de 1.49 kN y la correspondiente a la media de los experimentos es de 1.46 kN con lo que se calcula una diferencia del 2.05 %. Sin embargo, también se aprecia que los resultados de ALS-IRE sin el ajuste multilíneal son más cercanos a los experimentos entre 0.6 y 0.8 mm de desplazamiento. Finalmente, en la Figura 17 se muestra la configuración deformada de la viga con muesca en la que se aprecia la formación de la grieta sobre la muesca del espécimen, lo cual coincide con lo observado en el experimento [14].

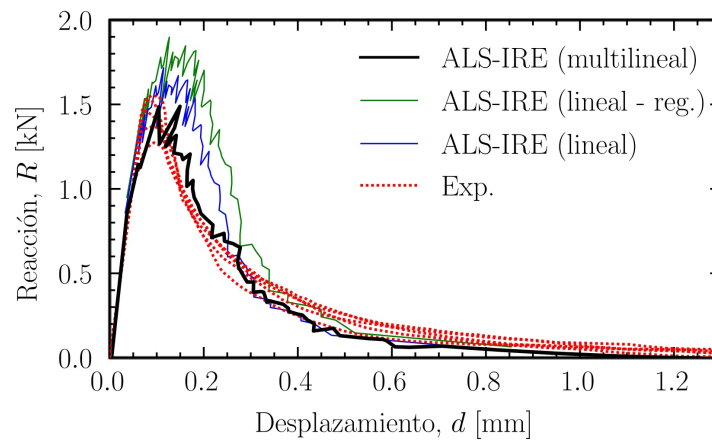


Figura 16: Comparación de las curvas reacción-desplazamiento numéricas y experimentales.

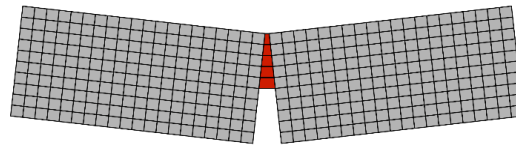


Figura 17: Configuración deformada obtenida con ALS-IRE.

CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una propuesta para modificar la forma de la ley de ablandamiento empleada en ALS. Esta modificación se basa en ajuste multilineal a cualquier forma de ley de ablandamiento, por ejemplo, si se conoce algún resultado experimental del material o si se conoce el comportamiento de algún material similar. De este ajuste multilineal se obtiene la secuencia de degradación de los parámetros mecánicos del material para los elementos críticos (ver 2). Así, no es necesario desarrollar una formulación nueva dentro del método de ALS para considerar una ley de ablandamiento distinta.

Esta propuesta se sustenta en el uso de IRE dentro del procedimiento de ALS lo que permite que el elemento cuadrilátero empleado en el ajuste multilineal sea de rango suficiente y no susceptible a inestabilidades numéricas. Así, este ajuste puede llevarse a cabo en cualquier otro problema a analizarse con ALS-IRE.

Los resultados obtenidos en el ejemplo de aplicación muestran que el comportamiento aproximado numéricamente en la relación carga-desplazamiento es similar a lo medido experimentalmente particularmente en la aproximación de la reacción máxima (con una diferencia del 2.05 %). Adicionalmente, se observa una mejora en la calidad de dicha aproximación en comparación con lo obtenido para una ley de ablandamiento lineal para desplazamientos hasta 0.6 mm.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE AUTORES Y COLABORADORES

H. R. Amezcu: Conceptualización, Software, Análisis, Investigación, Redacción - Preparación del borrador original. **A. G. Ayala**: Conceptualización, Supervisión, Apoyo financiero, Redacción - Revisión y Edición. **C. E. González**: Análisis, Validación, Visualización, Redacción - Revisión y Edición. **J. A. Lagunas**: Software, Validación, Investigación, Redacción - Revisión y Edición.

REFERENCIAS

- [1] H. R. Amezcu, A. G. Ayala, and S. E. López. Diseño sísmico basado en desplazamientos y control de daño local de edificios asimétricos. *XXIV Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica – XXIVCNIS, Guadalajara, Jalisco, México, 2023*.
- [2] F. H. Bañuelos, A. G. Ayala, and S. E. López. A displacement-based seismic design procedure for buildings with fluid viscous dampers. *Earthquakes and Structures*, vol. 18, no. 5, pp. 609–623, 2020. DOI: 10.12989/EAS.2020.18.5.609.
- [3] J. A. Lagunas, A. G. Ayala, J. J. Gutiérrez, and C. Montiel. A Displacement-Based Seismic Design Procedure with Local Damage Control, Dissipated Energy and Resilience. In *Energy-Based Seismic Engineering - Proceedings of IWEBSE 2023*, Springer, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-36562-1_14.
- [4] C. E. González. Definición de demandas sísmicas para el diseño de estructuras considerando conceptos de resiliencia. *Tesis de Doctorado*, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2023.
- [5] C. Liu, X. Nie, J. Wang, J. Fan, and M. Tao. State-of-the-art of macroscopic constitutive models of concrete. *Journal of Building Structures*, vol. 3, no. 1, pp. 29–41, 2022. DOI: 10.14006/j.jzjgxb.2019.0842.
- [6] X. Zhou, D. Lu, X. Du, G. Wang, and F. Meng. A 3D non-orthogonal plastic damage model for concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 360, 2020. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112716.
- [7] J. Rots. Sequentially linear continuum model for concrete fracture. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, vol. 13, pp. 831–839, 2001.
- [8] H. R. Amezcu and A. G. Ayala. Stabilized reduced integration and sequentially linear analysis in the approximation of the non-linear behaviour of structures. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 39, no. 2, 2023. DOI: 10.23967/j.rimni.2023.06.002.
- [9] G. V. Guinea, J. Planas, and M. Elices. A general bilinear fit for the softening curve of concrete. *Materials and Structures*, vol. 27, no. 2, 1994. DOI: 10.1007/BF02472827.

- [10] J. Rots and S. Invernizzi. Regularized sequentially linear saw-tooth softening model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, no. 7-8, pp. 821–856, 2004. DOI: 10.1002/nag.371.
- [11] H. R. Amezcua and A. G. Ayala. A computationally efficient numerical integration scheme for non-linear plane stress/strain FEM applications using one-point constitutive model evaluation. *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 85, no. 1, 2023. DOI: 10.12989/sem.2023.85.1.089.
- [12] O. Núñez. Application of an improved sequentially linear analysis model to the approximation of the non-linear behaviour of structures. *Tesis de Licenciatura*, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2023.
- [13] H. A. W. Cornelissen, D. A. Hordijk, and H. W. Reinhardt. Experimental determination of crack softening characteristics of normal weight and lightweight concrete. *Heron*, vol. 31, no. 2, 1986.
- [14] H. Kormeling and H. Reinhardt. Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete. *Delft University of Technology, Experiment Report*, pp. 5–83, 1983.