

Métodos Analíticos y Numéricos para el Análisis de Placas Delgadas

Analytical and Numerical Methods for the Analysis of Thin Plates

De-la-Colina, J.^{1*}  (*jcolina@uaemex.mx)

Recibido: 05-08-2024 Aceptado: 03-09-2024

RESUMEN

Las placas son elementos estructurales planos que se emplean comúnmente en varias ramas de la ingeniería. A diferencia de los problemas de estados planos, los cuales pueden tener geometrías similares, las cargas en una placa son normales a su superficie media. El presente trabajo presenta la teoría general de placas delgadas, así como algunos de los métodos analíticos y numéricos más usados para su análisis. Se describe el método de Rayleigh-Ritz, el método de diferencias finitas y el método del elemento finito. Se incluye un ejemplo de una placa con geometría atípica, la cual se analiza con ayuda de *Matlab*. El estudio de los métodos de análisis de placas indica que las soluciones analíticas son aplicables a problemas básicos con geometrías, condi-

ciones de frontera y cargas simples, mientras que los métodos numéricos son aplicables a geometrías y condiciones más generales. El método de diferencias finitas resulta difícil de aplicar (y programar) cuando los bordes de las placas no son rectangulares. Las menores diferencias relativas entre los resultados obtenidos con diferentes métodos aproximados se obtienen generalmente para los valores de la respuesta con las mayores magnitudes, los cuales generalmente rigen el diseño de la estructura analizada.

Palabras clave: Placas delgadas, Método de Rayleigh-Ritz, Diferencias finitas, Elementos finitos, Teoría de Kirchhoff.

ABSTRACT

Plates are flat structural elements that are commonly used in several branches of engineering. Unlike plane state problems, which can have similar geometries, the loads on a plate are normal to its mean surface. This work makes a brief presentation of the theory of thin plates and describes some of the most used analytical and numerical methods for

their analysis. The Rayleigh-Ritz method, the finite difference method and the finite element method are described. An example of a plate with an atypical geometry, which is analyzed with *Matlab*, is included. The study of plate analysis methods indicates that analytical solutions are applicable to basic problems with simple geometries, boundary

¹Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México, Paseo Universidad S/N, Toluca, Estado de México, México. CP. 50110.



conditions and loadings, while numerical methods are applicable to more general geometries and conditions. The finite difference method is difficult to apply (and program) when the plate edges are not rectangular. The smallest relative differences among the results obtained with different approximate methods are generally obtained for the respon-

se values with the largest magnitudes, which generally govern the design of the structure analyzed.

Keywords: Thin plates, Rayleigh-Ritz method, Finite differences, Finite elements, Theory of Kirchhoff.

INTRODUCCIÓN

Una placa es un elemento estructural con una de sus dimensiones comparativamente más delgada que las otras dos. A diferencia de los problemas de estados planos, los cuales pueden tener geometrías similares, en una placa las cargas son usualmente normales a su superficie media. Las placas son omnipresentes en el sentido de que se encuentran en varias ramas de la ingeniería y sus aplicaciones son muy diversas. Se usan placas en las ingenierías aeronáutica, espacial, mecánica, etc. Por ejemplo, en la ingeniería civil se emplean estos elementos con algunos nombres particulares. Quizás el ejemplo más ilustrativo es el de losas en casas, edificios, puentes y construcciones industriales. Otro caso son los muros de contención empleados para soportar las cargas laterales que ocasionan los suelos.

El diseño de cada placa requiere la revisión de tres aspectos principalmente [1]: 1) que no se deforme más de lo permitido para no afectar su funcionalidad, 2) que el material del que está hecha no se dañe y 3) que no vibre significativamente. Los aspectos 1 y 2 se determinan con ayuda de un análisis estático, mientras que el 3 requiere de un análisis dinámico. Este trabajo se limita al estudio de métodos de análisis estáticos de placas delgadas.

Un análisis estático de una placa debe proporcionar una descripción de cómo resultan los desplazamientos normales al plano medio de la placa, con lo cual sería posible revisar el primer aspecto del diseño. Para el segundo aspecto, el análisis debe proveer las distribuciones de los momentos flexionantes y de las fuerzas cortantes. Por ejemplo, en el caso de una losa de concreto reforzado, estos resultados le permiten al ingeniero determinar tanto el espesor como la distribución y cantidad de varillas de refuerzo a colocar en la losa. Es claro que el análisis de una placa es una actividad necesaria para el diseño.

En este trabajo se estudian los principales métodos para determinar dichos desplazamientos así como los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes para placas de varias formas, condiciones de apoyo y tipos de cargas. Se consideran sólo análisis estáticos y se supone que el material isotrópico de la placa es elástico y lineal. También se asume que los desplazamientos son pequeños y que las deformaciones sólo se deben a la flexión. Este tipo de placas donde las deformaciones por cortante son despreciables se conocen como placas de Kirchhoff. Esta teoría también se conoce como teoría elástica para placas delgadas con desplazamientos pequeños [2][3]. El estudio de placas gruesas incorpora las deformaciones por cortante [4].

El objetivo de este escrito es presentar de manera general los aspectos básicos de la teoría de placas delgadas y los principales métodos para su análisis.

MARCO TEÓRICO

Sistema de referencia, notación y suposiciones básicas

La nomenclatura se asocia a un sistema de referencia y ésta es útil para interpretar correctamente los resultados. Se considera una placa de espesor constante t . El plano medio de la placa coincide con el plano xy de un sistema de referencia derecho. En la Figura 1 se muestra un caso en donde el eje z resulta dirigido hacia abajo. El desplazamiento w en dirección normal es la variable a calcular.

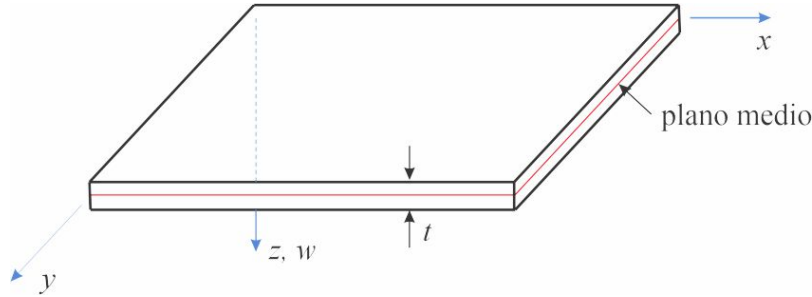


Figura 1: Plano medio de una placa y sistema de referencia Cartesiano.

Las principales suposiciones de la teoría de placas delgadas son las siguientes: 1) no hay deformaciones longitudinales en el plano medio de la placa, 2) los puntos situados inicialmente en una normal al plano medio permanecen en una normal durante la flexión, y c) los esfuerzos normales en la dirección transversal (σ_z) son despreciables.

Rotaciones y curvaturas

Ahora es posible establecer una relación básica entre los giros de la placa en ambas direcciones (θ_x y θ_y) y la derivada del desplazamiento transversal w (Figura 2a), Ecs. (1).

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

La curvatura es otra relación importante para deducir la ecuación de una placa. Al igual que en el caso de vigas, la curvatura k se define como el recíproco del radio de curvatura r , (Ec. (2)).

$$k = \frac{1}{r} \quad (2)$$

Con algunos argumentos geométricos [2], no es difícil relacionar los radios de curvatura (y las curvaturas) a lo largo de los ejes de referencia r_x y r_y con las segundas derivadas del desplazamiento normal. Las relaciones se presentan en las Ecs. (3).

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

Una cantidad relacionada con la torsión es la segunda derivada cruzada. Es interesante notar que esta torsión juega un papel importante en el comportamiento estructural de placas y hace que su resistencia sea mayor que la que resultaría de una simple suma de resistencias de dos vigas ortogonales unidas en su

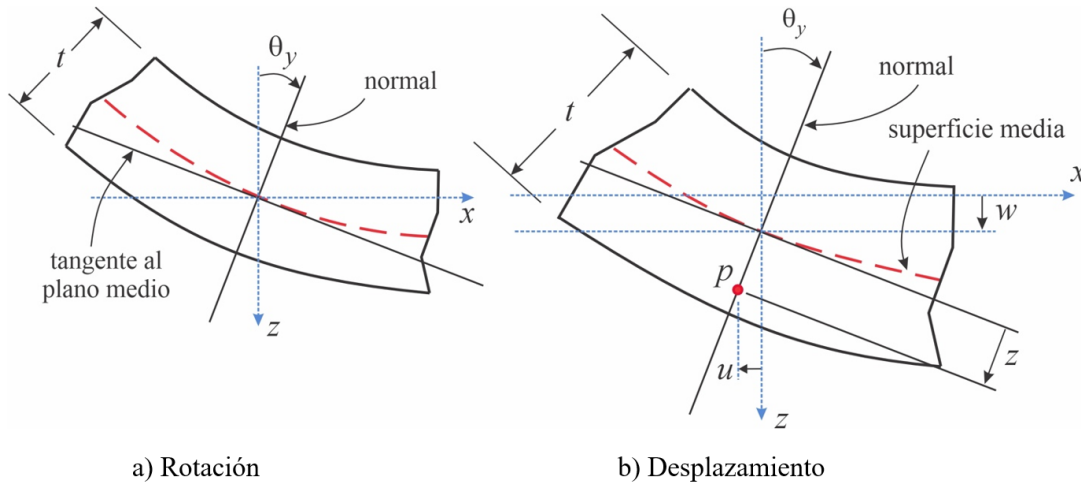


Figura 2: Rotación θ_y y desplazamiento u de un punto p a una distancia z .

intersección (sin torsión). Esta curvatura cruzada es una deformación de torsión (*twist*) y se define como lo indica la Ec. (4).

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

Desplazamientos y deformaciones unitarias

Los desplazamientos u y v a lo largo de los ejes x y y , respectivamente, no son cantidades independientes en la teoría de placas delgadas. Ambos dependen del desplazamiento w , el cual permanece como la variable por determinar. En esta subsección se presentan las relaciones para calcularlos en función de la distancia z al plano medio de la placa. La Figura 2b ilustra el cálculo del desplazamiento u a lo largo del eje x . El cálculo del desplazamiento v en la dirección y es similar, como lo indican las Ecs. (5).

$$u = -z \theta_y = -z \frac{\partial w}{\partial x}, v = -z \theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5)$$

Las deformaciones unitarias se obtienen derivando los desplazamientos. Las longitudinales ε_x y ε_y , y la de cortante a una distancia z de la superficie media se calculan con las Ecs. (6).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (6)$$

Las deformaciones unitarias permiten establecer una relación con los esfuerzos. Se pueden establecer [2] las relaciones con ayuda de la ley de Hooke (linealidad entre esfuerzos y deformaciones unitarias). Para calcular los esfuerzos de interés se emplean las Ecs. (7).

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (7)$$

{7}

Las relaciones anteriores también se pueden expresar en términos de las curvaturas haciendo uso de las Ecs. (6). Es importante observar que los subíndices de los esfuerzos normales σ_x y σ_y se refieren a las direcciones de los ejes de referencia, como se ilustra en la Figura 3a.

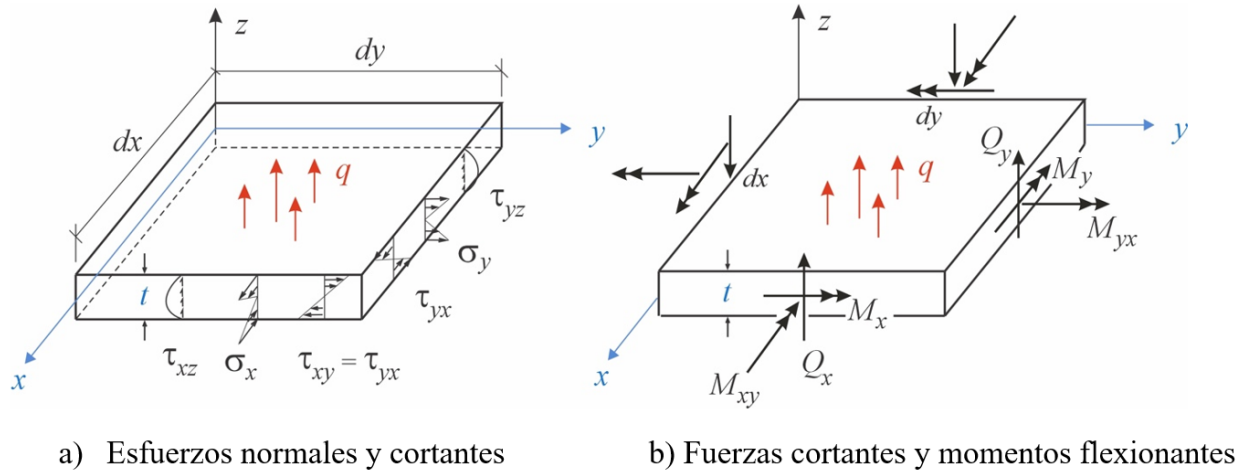


Figura 3: Elemento diferencial de una placa con carga normal q .

La observación del párrafo anterior, en relación con la nomenclatura de los subíndices, también es importante en la definición de los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes (todos por unidad de ancho). Los subíndices de los elementos mecánicos heredan los subíndices de los esfuerzos con los que se asocian, como se observa en la Figura 3b y lo indican las Ecs. (8).

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z \, dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
 M_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z \, dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 M_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} \, dz = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
 Q_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} \, dz, \\
 Q_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} \, dz.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Con los momentos y las fuerzas cortantes, es posible establecer la ecuación de equilibrio. Ésta puede expresarse en términos de los momentos o bien en términos del desplazamiento w , como lo indican las Ecs. (9), donde q es la carga por unidad de área.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q, \quad \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (9)$$

En estas ecuaciones la cantidad D es la rigidez a flexión de la placa y es similar a la rigidez a flexión EI de una viga. Tanto los momentos como D se refieren a un ancho unitario. Los momentos ocasionan esfuerzos positivos en la cara positiva. Por ejemplo, M_x ocasiona esfuerzos σ_x positivos (en dirección positiva de x) en la cara z positiva.

La solución de la segunda Ec. (9) consiste en determinar la función que expresa el desplazamiento w en términos de las coordenadas y de algunas otras cantidades. La función a determinar $w(x, y)$ debe satisfacer las condiciones de frontera. Con la función $w(x, y)$ o algunos valores de w en ciertos puntos de la placa, es posible obtener o aproximar las funciones de los momentos flexionantes y torsionantes así como de las fuerzas cortantes. Finalmente, estos elementos mecánicos permiten calcular las distribuciones de esfuerzos.

MATERIALES Y MÉTODOS

El análisis de una placa, con ciertas condiciones de borde y sujeta a un conjunto de cargas, consiste en obtener las distribuciones de los desplazamientos, los esfuerzos y los elementos mecánicos. Así, el primer paso del análisis consiste en resolver la segunda ecuación diferencial Ec. (9).

El primer método es la solución de la ecuación diferencial en forma cerrada para obtener la función $w(x, y)$. Soluciones cerradas no son simples por lo que desde hace 200 años se propusieron aproximaciones a las soluciones cerradas empleando series trigonométricas dobles [5]. Estas soluciones no son elementales, pero permiten obtener excelentes aproximaciones a las soluciones cerradas para placas con condiciones de frontera y cargas simples. La mayoría de las soluciones presentadas en el libro clásico de Timoshenko y Woinowsky-Krieger [2] son con este tipo de series.

La complejidad de estos primeros métodos motivó la búsqueda de otros métodos alternos, aun cuando éstos llevaran sólo a aproximaciones lo suficientemente precisas para fines de ingeniería.

Otro de los primeros métodos es el de Rayleigh-Ritz (MRR), el cual se planteó a finales del siglo XIX [6]. Este método es general y permite no sólo analizar estáticamente una placa, sino que también se puede emplear para análisis dinámicos y de pandeo. Este método también se puede aplicar a otros problemas de ingeniería como vigas, columnas, etc. [7][8].

El MRR consiste en proponer una función de la variable de interés (*e.g.*, w) en términos de las demás cantidades del problema. Esta *función de prueba* deben ser *admisibles* y puede expresarse en términos de una o varias cantidades independientes (grados de libertad). Aplicando el principio de la energía potencial estacionaria es posible determinar los valores de los grados de libertad, con lo cual la función de prueba queda completamente definida. Para el caso de condiciones de borde atípicas se recomienda consultar las referencias [9] y [10].

Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas (MDF), en lugar de buscar la solución exacta o alguna función que la aproxime mediante series o usando funciones de prueba, calcula valores puntuales de la variable de interés (w) dentro del dominio del problema. En el caso de placas, usualmente se traza una malla y en las intersecciones de las líneas se ubican los puntos donde se calculan los valores del desplazamiento normal w . En este método se sustituyen las derivadas en los puntos de interés mediante ecuaciones de diferencias.

Éstas últimas son cocientes simples que se calculan en cada punto de la malla y quedan expresados en términos del desplazamiento en el punto donde se plantea la ecuación y de los desplazamientos de los puntos vecinos. El conjunto de las ecuaciones de diferencias conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas, cuya solución determina los valores de los desplazamientos en los puntos.

Un ejemplo de una ecuación de diferencias para aproximar la pendiente en el punto x_0 se ilustra en la Figura 4 y se puede aproximar con la Ec. (10).

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (10)$$

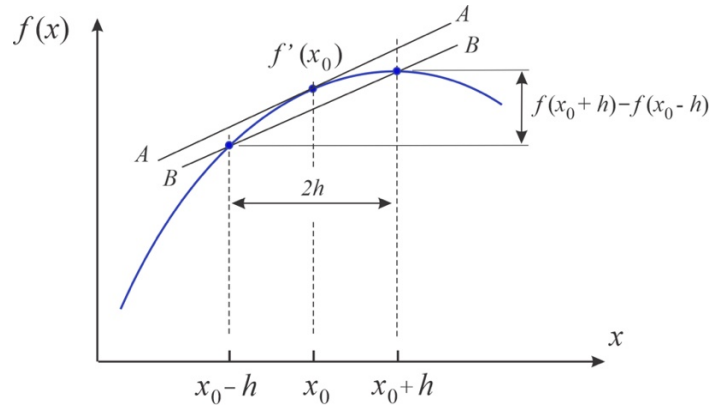


Figura 4: Aproximación a la pendiente $f'(x_0)$ con ecuación de diferencias finitas central.

Esta ecuación aproxima la derivada de $f(x)$ en x_0 (pendiente de la línea AA) a partir del valor de la función en los puntos adyacentes, calculando la pendiente de la línea BB. Similarmente, se puede aproximar la segunda derivada de $f(x)$ en x_0 con la Ec. (11).

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2} \quad (11)$$

En el caso de placas, la variable de interés es el desplazamiento w , por lo que si cada punto o estación (separados una distancia $h = \Delta x$) se identifica con un subíndice, la aproximación a la cuarta derivada en la estación m queda en función de los desplazamientos de las cuatro estaciones adyacentes (2 a cada lado). Esto se indica en la Ec. (12).

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4}\right)_m \cong \frac{w_{m-2} - 4w_{m-1} + 6w_m - 4w_{m+1} + w_{m+2}}{(\Delta x)^4} \quad (12)$$

Cuando la derivada es en el mismo punto o estación m pero la derivada es con respecto a la variable y , es conveniente usar dos subíndices: el primero para la dirección x y el segundo para la dirección y . Por ejemplo, la cuarta derivada de w con respecto a y en la estación (m, n) sería la indicada en la Ec. (13), en donde por conveniencia se hace $\lambda = \Delta x = \Delta y$:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{m,n} \cong \frac{1}{\lambda^4} [w_{m,n-2} - 4w_{m,n-1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n+1} + w_{m,n+2}] \quad (13)$$

Finalmente, al extender estas ecuaciones a la segunda Ec. (9) resulta la Ec. (14).

$$D(\nabla^2 \nabla^2 w)_{m,n} = \frac{D}{\lambda^4} \left[20w_{m,n} - 8(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) \right. \\ \left. + 2(w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}) \right. \\ \left. + w_{m+2,n} + w_{m-2,n} + w_{m,n+2} + w_{m,n-2} \right] = (q_z)_{m,n}. \quad (14)$$

Los puntos involucrados en este cálculo se identifican en la porción de placa que se muestra en Figura 5a, donde m y n se refieren a los índices asociados a x y y , respectivamente.

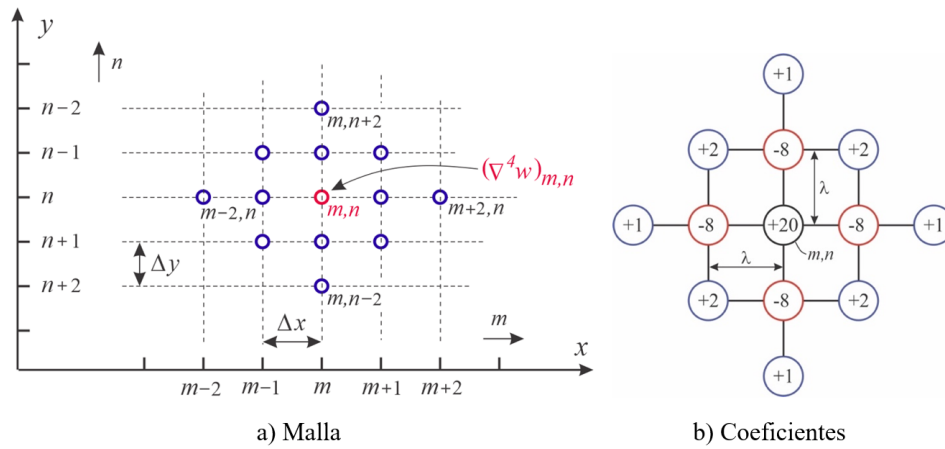


Figura 5: Malla de diferencias finitas y coeficientes para calcular $(\nabla^4 w)_{m,n}$ en el punto m, n .

El arreglo de los coeficientes por los que se multiplican los desplazamientos en cada estación se puede ilustrar con el esquema de la Figura 5b. Este esquema incorpora los coeficientes de la Ec. (14) en la geometría de la Figura 5a. El desarrollo mantiene que $\Delta x = \Delta y = \lambda$, pero cuando no se cumple esta condición, los coeficientes de la Figura 5b cambian [3][5].

Después de calcular los desplazamientos en cada una de las estaciones, se estiman los elementos mecánicos u otras cantidades (giros o curvaturas) en diversos puntos de la malla [3][5]. Estos cálculos involucran también ecuaciones de diferencias. Por ejemplo, el cálculo del momento M_x asociado a los esfuerzos σ_x en la estación (m, n) se obtiene con la Ec. (15).

$$(M_x)_{m,n} = -\frac{D}{\lambda^2} [w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n} + \nu(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1})] \quad (15)$$

El análisis de placas con el método de diferencias finitas requiere una apropiada representación de las condiciones de frontera. Así, se deben reemplazar las derivadas en las expresiones obtenidas para un punto central de la malla (m, n) con las expresiones pertinentes de diferencias finitas que correspondan al borde en cuestión. Cuando se usan diferencias centrales como se ha hecho hasta ahora, es necesario considerar puntos ficticios fuera de la placa [2] a [5]. Cuando las placas tienen geometrías particulares

como lados oblicuos, el método requiere ciertas consideraciones especiales que quedan fuera del alcance de este escrito [9] a [11].

Método del Elemento Finito

El método del elemento finito (MEF) es un procedimiento numérico para el análisis de una gran variedad de problemas en ingeniería. Con el MEF es posible analizar estructuras de cualquier tipo (vigas, placas, estados planos, sólidos de revolución, etc.), problemas de magnetismo, de fluidos, etc. Como ejemplo, en la Figura 6a se ilustra un muro de un edificio sujeto a una distribución de fuerzas laterales. Si este ejemplo se considera plano, el análisis consistiría en determinar los campos (funciones) de desplazamientos u y v del muro.

La idea básica del método consiste en dividir el dominio del problema en pequeñas regiones llamadas elementos finitos. Una opción sería dividir (discretizar) el muro como se muestra en la Figura 6b. Cada área de la malla de elementos no está vacía sino que consiste de un elemento plano sujeto a un estado plano de esfuerzos como se observa en la Figura 6c.

Un aspecto interesante del MEF es que los campos de desplazamientos al interior de cada elemento finito se hacen depender de los desplazamientos u y v de sus puntos nodales. En el ejemplo, donde sólo se emplean 4 nodos, es claro que la variación de los desplazamientos al interior del elemento resultará en una función sencilla, independientemente del campo de desplazamientos verdadero para el muro.

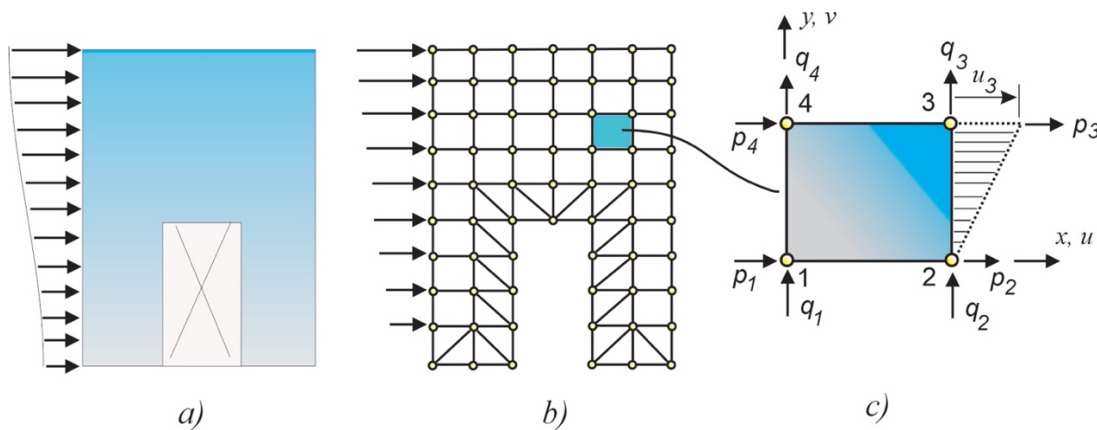


Figura 6: Discretización de un muro en elementos finitos limitados por puntos nodales.

Estas funciones que definen los desplazamientos en el interior de los elementos a partir de los valores nodales se conocen como *funciones de forma* y también se emplean para definir la relación entre fuerzas nodales (f) y desplazamientos nodales (d) para un elemento. Esta relación se puede establecer matricialmente como lo indica la Ec. (16), donde k_i se conoce como la *matriz de rigidez* del elemento i . En el caso de elementos finitos como el de la Figura 6c, la matriz resulta de 8×8 .

$$k_i d = f \quad (16)$$

Otro aspecto del método es que la unión entre los elementos finitos sólo se da a través de los nodos; sin embargo, dado que los campos de desplazamiento son similares entre elementos adyacentes y éstos

sólo dependen de los valores nodales, no es posible en principio que haya traslapes o aberturas entre sus bordes.

Con las matrices de rigidez de cada uno de los elementos finitos, es posible plantear el equilibrio de toda la estructura con un arreglo similar (Ec. (17)), establecido también en los puntos nodales.

$$\mathbf{KD} = \mathbf{F} \quad (17)$$

En esta expresión, $\mathbf{K}$ también es una matriz de rigidez, pero de toda la estructura. En el caso de la malla de la Figura 6b, la matriz sería de 120 x 120. Esta simplificación permite convertir el problema original de buscar una función para todo el dominio, la cual hubiera requerido quizás resolver alguna ecuación diferencial, en un sistema de ecuaciones algebraicas. En la ecuación Ec. (17) $\mathbf{D}$ es el vector de desplazamientos y $\mathbf{F}$ el vector de fuerzas nodales. Las condiciones de frontera se incorporan durante el proceso de pasar de la Ec. (16) a la Ec. (17).

La solución del sistema de ecuaciones proporciona los valores de los desplazamientos de todos los puntos nodales que tienen posibilidad de moverse. Con estos desplazamientos se calculan deformaciones unitarias y esfuerzos, completando el análisis.

El planteamiento que se ha presentado en esta sección es muy simplificado y usualmente se obtiene para problemas de mecánica estructural a partir del principio de la energía potencial estacionaria [7]. Alternativamente, se puede llegar a planteamientos similares recurriendo a métodos de residuos pesados [12][13] como el de colocación o el de Galerkin.

El método del elemento finito, así como el de diferencias finitas, se pueden ver como métodos generales para la solución de ecuaciones diferenciales. Varios libros de ecuaciones diferenciales y/o de métodos numéricos [14][15][16] incluyen el MEF como un método numérico para la solución de este tipo de ecuaciones.

Matlab[®] es un programa para realizar cálculos matemáticos, análisis de datos, simulación, graficación y para el desarrollo de algoritmos [17][18]. *Matlab* contiene un conjunto de herramientas (funciones) para realizar los cálculos y procesos. Además, tiene algunos módulos especializados (*toolboxes*) que son conjuntos de funciones particulares para resolver problemas específicos. Ejemplos incluyen módulos para procesamiento de señales, análisis estadístico de datos, cálculo simbólico, etc. Uno de estos módulos es para la solución de *ecuaciones diferenciales parciales* (EDP) y emplea el MEF para resolverlas [19].

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esta sección presenta el análisis de una placa triangular sujeta a cargas estáticas. El principal objetivo es ilustrar algunas particularidades del uso de *Matlab* y de su módulo EDP. El sólido de la placa se creó con *TinkerCad* [20]. La placa que se analiza tiene la geometría triangular y condiciones de apoyo que se indican en la Figura 7a. El ejemplo se toma de la referencia [10] en donde la placa se analizó con el método *pb2* (Rayleigh-Ritz). La carga soporta una presión de 1,000 kg/m². Los valores del módulo de elasticidad y de la relación de Poisson son: $E = 221,350 \text{ kg/cm}^2$ y $\nu = 0.2$. El espesor de la placa $t = 0.15 \text{ m}$.

En la Figura 8 se muestran las instrucciones para analizar la placa con *Matlab*. Se puede observar que el modelo se importa de un archivo con extensión STL que contiene el sólido de la placa. El modelo puede crearse con programas como *SolidWorks*, *TinkerCad*, etc.

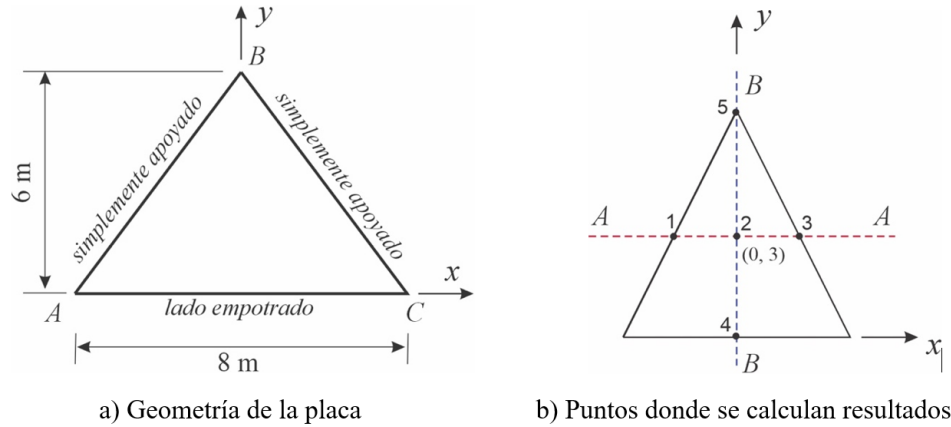


Figura 7: Placa triangular y puntos donde se reportan resultados en la referencia [10].

En la primera figura generada con el código de *Matlab* (no mostrada aquí) se presenta el modelo en relación con los ejes de referencia asignados por *Matlab* (los cuales son diferentes de los indicados en la Figura 7a) y se identifican las caras del sólido. El eje z sigue siendo normal al plano de la placa. La cara F1 es la superior (z positivo), F2 y F3 son las caras simplemente apoyadas que son diagonales a los ejes de referencia (x, y), F4 es la cara inferior y F5 es la cara paralela al eje y de *Matlab* (cara empotrada). Las caras del sólido se usan para definir las condiciones de frontera y las cargas.

La malla de elementos finitos generada por *Matlab* se muestra en la Figura 9a. En la Figura 9b se muestran los desplazamientos calculados y en las Figuras 10a y 10b los esfuerzos σ_x y σ_y . Ambos esfuerzos permiten calcular los momentos M_x y M_y , respectivamente. Todas las unidades se mantienen en kg y cm. Se puede ver que el desplazamiento máximo es aproximadamente 0.17 cm, el cual coincide con los valores obtenidos en la referencia [10]. Es importante recordar las definiciones de los esfuerzos (Figura 3a) y de los momentos (Figura 3b) para hacer una adecuada interpretación de los resultados. Esta interpretación es fundamental, por ejemplo, para la colocación de las varillas de refuerzo (dirección y posición) en el caso de losas de concreto armado.

Por lo que se refiere al análisis de los esfuerzos y momentos flexionantes, en la referencia [10] se reportan los momentos flexionantes M_x y M_y calculados con el método *pb2* de Rayleigh-Ritz, mientras que *Matlab* reporta los esfuerzos en las caras superior e inferior de la placa. Ya que la variación de esfuerzos a través del espesor de la placa tiene variación lineal es simple comparar esfuerzos y momentos ya que ambos están relacionados a través de la Ec. (18), donde S es el módulo de sección de la placa.

$$M = S \sigma_{\text{máx}} \quad (18)$$

En la referencia [10] se reportan los momentos flexionantes M_x a lo largo de la línea AA' de la Figura 7b y los momentos flexionantes M_y se reportan a lo largo de la línea BB'. Por brevedad, en este trabajo sólo se comparan dos valores de M_x y tres valores de M_y , como se resume en las Tablas (1) y (2), respectivamente. La numeración de los puntos se muestra en la Figura 7b.

Los esfuerzos σ_x y σ_y estimados con el MEF (*Matlab*) se muestran en las Figuras 10a y 10b, respectivamente. Los valores numéricos de $\sigma_{x \text{ máx}}$ se obtuvieron directamente de los resultados numéricos, ya

```

% Ejemplo de una placa triangular (Tesis Fco. Manzanares, pag. 43)
model = createpde("structural","static-solid");
|
% The STL file was created with Tinkercad
placa = importGeometry(model,"Triangular_plate.stl");

% Escala la placa. Originalmente con medidas (from tinkercad) de 160 x
% 120 unidades x 3.0 de espesor
% Escala el modelo multiplicando por 5 en las tres direcciones
% para obtener dimensiones que se establecen como si fueran en cm
scale(placa,[5 5 5])

% Plot the geometry, displaying face labels.
figure
pdeplot(model,"FaceLabels","on")
view(100,100);
title("Placa triangular con caras etiquetadas")

% Specify Young's modulus and Poisson's ratio of the material. Unidades: kg, cm
structuralProperties(model,"YoungsModulus",221350.0,"PoissonsRatio",0.2);

% Apply Boundary Conditions and Loads
% The problem has two types of boundary conditions: the largest side (face 5) is fixed,
% and the other sides (faces 2 and 3) are simple supported.
% All other boundary conditions (faces 1 and 4, by default, are free boundaries.
structuralBC(model,"Face",5,"Constraint","fixed");
structuralBC(model,"Face",2,"ZDisplacement",0.0);
structuralBC(model,"Face",3,"ZDisplacement",0.0);

% Apply a distributed load in the negative z-direction to the front face F1.
% Pressure = 1000 kg/m2 = 0.1 kg/cm2
structuralBoundaryLoad(model,"Face",1,"SurfaceTraction",[0.0 ;0.0 ;-0.1]);

% Generate and plot a mesh.
generateMesh(model);
figure
pdeplot3D(model)
title("Malla con elementos tipo tetraedro cuadratico");

% Use the solve function to calculate the solution.
result = solve(model)

% Examine Solution
% Find the maximal deflection of the bracket in the z-direction.
minUz = min(result.Displacement.uz);
fprintf("Maximal deflection in the z-direction = %g meters.", minUz)

% Plot Results at the Command Line
% You also can plot the results, such as the displacement components and the von Mises stress,
% at the MATLAB® command line by using the pdeplot3D function.
figure
pdeplot3D(model,"ColorMapData",result.Displacement.uz)
title("z-displacement")
colormap("jet")

figure
pdeplot3D(model,"ColorMapData",result.Stress.sxx)
title("Esfuerzos Sigma-xx")
colormap("jet")

figure
pdeplot3D(model,"ColorMapData",result.Stress.syy)
title("Esfuerzos Sigma-yy")
colormap("jet")

```

Figura 8: Código de Matlab para el análisis de la placa triangular.

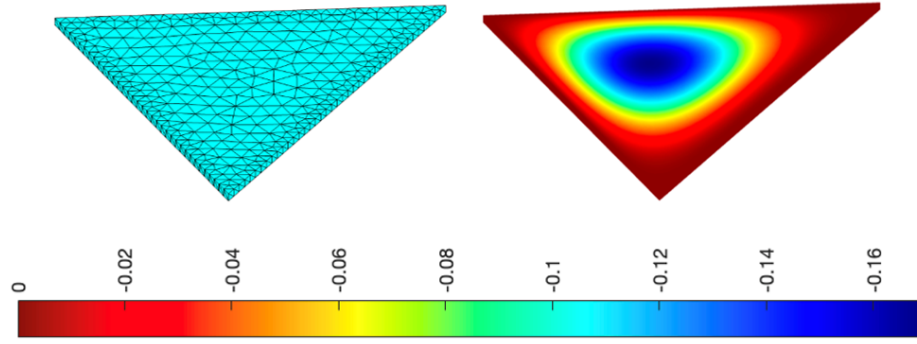


Figura 9: Malla de elementos finitos y desplazamientos [cm] verticales de la placa triangular.

que la estimación de los esfuerzos mediante los contornos de colores es subjetiva. Para $t = 15$ cm, el módulo de sección resulta igual a $S = 37.5 \text{ cm}^3/\text{cm}$.

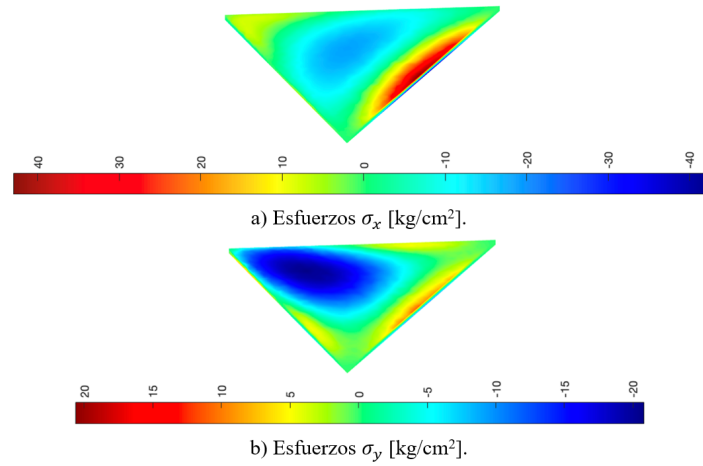


Figura 10: Esfuerzos normales en la placa triangular.

En la Tabla 1 se presentan los momentos flexionantes M_x calculados con los esfuerzos calculados con el MEF y se comparan con los reportados en la referencia [10]. Las estimaciones de la referencia [10] se hicieron con el método *pb2* de Rayleigh-Ritz, el cual es también aproximado ya que las funciones de prueba propuestas no necesariamente son iguales a las funciones verdaderas que describen el campo de los desplazamientos normales de la placa. En la Tabla 2 se comparan los momentos flexionantes M_y .

Tabla 1: Comparación de momentos flexionantes M_x (referencia 10 vs *Matlab*-MEF).

Punto	x	y	Posición	M_x Ref. [10]	$\sigma_{x \max}$ (MEF)	M_x (MEF)
	(m)	(m)		(kg-m/m)	(kg/cm ²)	(kg-m/m)
1 y 3	2.0	3.0	Borde	-154.5	1.12	-42.0
2	0.0	3.0	Centro	+741.0	19.40	+727.5

Tabla 2: Comparación de momentos flexionantes M_y (referencia 10 vs *Matlab*-MEF).

Puntos	x	y	Posición	M_y Ref. [10]	$\sigma_{y \max}$ (MEF)	M_y (MEF)
	(m)	(m)		(kg-m/m)	(kg/cm ²)	(kg-m/m)
4	0.0	0.0	Borde inferior	-1,637.8	41.49	-1,555.9
2	0.0	3.0	Centro	+593.3	15.48	+580.5
5	0.0	6.0	Vértice superior	-39.8	1.15	-43.1

Los valores de los momentos flexionantes en ambas tablas revelan que, en ausencia de una solución exacta, no es posible determinar el nivel de error en las estimaciones obtenidas con cada método. Los métodos aproximados pueden conducir a diferencias relativas significativas, pero usualmente éstas se presentan para las menores magnitudes de los valores calculados (desplazamientos, esfuerzos o momentos). Los métodos aquí presentados conducen a diferencias relativas pequeñas para las cantidades con las mayores magnitudes, las cuales generalmente rigen el diseño. En la Tabla 3 se observan las diferencias relativas de las estimaciones de los momentos flexionantes (relativos a los valores reportados en la referencia [10]).

Tabla 3: Diferencias relativas de momentos flexionantes.

Puntos	Momento	Valor	Valor	Diferencia relativa
		Ref. [10]	MEF	%
1 y 3	M_x	-154.5	-42.0	72.8
2		+741.0	+727.5	1.8
4		-1,637.8	-1,555.9	5.0
2	M_y	+593.3	+580.5	2.2
5		-39.8	-43.1	8.3

CONCLUSIONES

Se presentaron los aspectos básicos de la teoría de placas delgadas. Además de la solución cerrada (exacta) existen métodos analíticos y numéricos que aproximan la solución. Una solución analítica es mediante series trigonométricas dobles. El método de Rayleigh-Ritz permite aproximar el campo de desplazamientos mediante funciones *admisibles*. El método de diferencias finitas (MDF) es un procedimiento numérico aplicables al análisis de placas. Otro procedimiento numérico es el método del elemento finito (MEF), el cual divide la placa (dominio) en pequeñas regiones unidas a través de puntos nodales. Se presenta con detalle el análisis de una placa triangular con ayuda de *Matlab*, que recurre al MEF para la solución. El trabajo contribuye a dar un panorama comparativo breve de los principales métodos para el análisis de placas delgadas. Las *conclusiones* de este trabajo son las siguientes.

1. Las soluciones analíticas (series trigonométricas dobles y Rayleigh-Ritz) son aplicables a problemas básicos con geometrías, condiciones de frontera y cargas simples; mientras que los métodos numéricos (en particular el método del elemento finito) son aplicables a geometrías y condiciones más generales. El método de diferencias finitas resulta difícil de aplicar (y programar) cuando los bordes de las placas no son rectangulares.

2. Las menores diferencias relativas (normalizadas) entre los resultados obtenidos con diferentes métodos aproximados se obtienen generalmente para los valores de la respuesta con las mayores magnitudes, los cuales generalmente rigen el diseño de la estructura analizada.

REFERENCIAS

- [1] International Code Council. *International Building Code*. International Code Council, 2021.
- [2] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
- [3] R. Szilard. *Theories and Applications of Plate Analysis – Classical, Numerical and Engineering Methods*. John Wiley and Sons, 2004.
- [4] J. N. Reddy. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. 2nd ed., CRC Press, 2006.
- [5] E. Ventsel and T. Krauthammer. *Thin Plates and Shells – Theory, Analysis and Applications*. Marcel Dekker and CRC Press, 2001.
- [6] L. Rayleigh. *Theory of Sound*. Vol. 1, 2nd ed., Macmillan, 1894.
- [7] H. L. Langhaar. *Energy Methods in Applied Mechanics*. John Wiley, 1962.
- [8] Y. Kumar. The Rayleigh-Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review. *Journal of Vibration and Control*, I-23, 2017. doi: 10.1177/077546317694724.
- [9] K. Liew and C. Wang. Pb-2 Rayleigh-Ritz method for general plate analysis. *Engineering Structures*, 15(1), 1993. doi: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(93\)90017-X](https://doi.org/10.1016/0141-0296(93)90017-X).

- [10] F. Manzanares. *Análisis de Placas Delgadas con Geometrías Atípicas*. Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma del Estado de México, 2017.
- [11] T. Liszka and J. Orkisz. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers & Structures*, 11, pp. 83–95, 1980. doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(80\)90149-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(80)90149-2).
- [12] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt. *Concepts and Applications of the Finite Element Analysis*. 4th ed., John Wiley and Sons, 2002.
- [13] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and D. D. Fox. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 7th ed., Elsevier, 2014.
- [14] R. L. Burden, J. D. Faires, and A. M. Burden. *Numerical Analysis*. 10th ed., Cengage, 2015.
- [15] S. C. Chapra and R. P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. 8th ed., McGraw-Hill, 2020.
- [16] K. P. Chong, A. P. Boresi, S. Saigal, and J. D. Lee. *Numerical Methods in Mechanics and Materials*. 3rd ed., CRC Press, 2018.
- [17] A. Gilat. *MATLAB: An Introduction with Applications*. 6th ed., John Wiley and Sons, 2017.
- [18] B. D. Hahn and D. T. Valentine. *Essential MATLAB for Engineers and Scientists*. 8th ed., Academic Press, 2022.
- [19] MathWorks. *Partial Differential Equation Toolbox – User Guide MATLAB*. R2022b, 2022.
- [20] Autodesk. <https://www.tinkercad.com>, 2024.