

Transformada Wavelet en el Análisis de Series de Tiempo Caóticas

Wavelet Transform in the Analysis of Chaotic Time Series

E. Jiménez-López¹ * , N. Plata-Cesar² 
(*ejimenezl@uaemex.mx)

Recibido: 30 de septiembre de 2025 Aceptado: 30 de octubre de 2025

RESUMEN

En este escrito se realiza la evaluación de un sistema caótico con múltiples atractores a través del análisis de series temporales con la transformada Wavelet. Esta técnica permite analizar las fluctuaciones de tiempo-frecuencia en diferentes resoluciones, permitiendo identificar patrones complejos y transitorios en las series de tiempo caóticas. Con la transformada Wavelet se realiza la representación visual de las potencias más elevadas de una dinámica caótica que puede facilitar el entendimiento del sistema respecto a cómo evoluciona a lo largo del tiempo y en distintas escalas. Además, identifica patrones transitorios, detecta eventos o cambios en la serie de tiempo, lo que es útil para identificar las condiciones de transición de un estado caótico. Por lo tanto, la descomposición multiresolución de la transformada wavelet ayuda a mejorar la exactitud de los modelos predictivos de series temporales que incluyen una dinámica caótica.

Palabras clave: Sistema caótico, múltiples atractores, transformada wavelet, análisis multiresolución

ABSTRACT

In this paper, we evaluate a chaotic system with multiple attractors through time series analysis using the wavelet transform. This technique allows for the analysis of time-frequency fluctuations at different resolutions, enabling the identification of complex and transient patterns in chaotic time series. The wavelet transform provides a visual representation of the highest powers of chaotic dynamics, which can facilitate understanding of the system's evolution over time and at different

¹Centro de Investigación y Estudios Avanzados de la Población, Universidad Autónoma del Estado de México.

²Unidad Académica Profesional Tianguistenco, Universidad Autónoma del Estado de México.



scales. Furthermore, it identifies transient patterns, detects events, or changes in the time series, which is useful for identifying transition conditions from a chaotic state. Therefore, the multiresolution decomposition of the wavelet transform helps improve the accuracy of predictive models of time series that include chaotic dynamics.

Keywords: *Chaotic system, multiple attractors, wavelet transform, multiresolution analysis*

INTRODUCCIÓN

En este escrito se lleva a cabo una implementación numérica y una evaluación correspondiente de un sistema caótico que produce múltiples atractores mediante el estudio de las series temporales con la transformación Wavelet. Esta técnica permite analizar las fluctuaciones de tiempo-frecuencia en diferentes resoluciones, lo que ayuda a identificar patrones complejos y transitorios en las series de tiempo caóticas. El análisis con la transformada wavelet se basa en el análisis multiresolución que descompone la señal en componentes de diferentes escalas y frecuencias, lo que permite examinar tanto las fluctuaciones a largo plazo como las fluctuaciones a corto plazo [1].

La conducta de muchos procesos o fenómenos naturales es no lineal, por ejemplo, el meteorólogo Edward Lorenz intentó realizar una predicción atmosférica que abarcara más de cuatro o cinco días al inicio de la década de los sesenta. Para tal circunstancia, se tomó en cuenta un modelo de tres ecuaciones no lineales con tres variables independientes, logrando disminuir el elevado número de variables que podrían participar en este tipo de sistemas. Este modelo únicamente caracterizó de manera cualitativa la forma en que el clima evolucionó de manera caótica [2].

Una de las principales propiedades de los sistemas caóticos es su elevada sensibilidad a las condiciones iniciales. Pequeños cambios en la fase inicial de un proceso pueden resultar en grandes discrepancias al final del mismo. Hay una amplia gama de osciladores caóticos que se han implementado numéricamente, como son los sistemas de Lorenz, Rössler, Chua, entre otros [3].

Este trabajo emplea la transformada wavelet para describir las series temporales caóticas en lo que respecta a la distribución de su energía y ofrecer información complementaria acerca del sistema con múltiples atractores caóticos, con este análisis se identifican patrones y transiciones características de la dinámica caótica. La visualización de la dinámica caótica por medio de la transformada es como un espectrograma de potencia, que pueden ayudar a comprender la evolución de la dinámica caótica en el tiempo y en diferentes escalas [4-6].

La capacidad de adaptarse a datos no estacionarios es una de las ventajas que ofrece la transformada wavelet para el análisis de series temporales caóticas. Las series de tiempo caóticas son inherentemente no estacionarias, por eso resulta ideal la utilización de la transformada wavelet para este tipo de datos.

Además, identifica patrones transitorios, detecta eventos o cambios en la serie de tiempo siendo útil para identificar las condiciones de transición de un estado caótico a otro [7].

La transformada wavelet reduce el ruido, ayuda a filtrar el ruido no deseado de la serie de tiempo, analiza la dinámica en múltiples escalas, facilitando la identificación de las características caóticas subyacentes y revelando patrones y características que no serían evidentes con el análisis tradicional de Fourier [8,9].

La transformada wavelet ha sido utilizada para analizar series de tiempo caóticas generadas por sistemas numéricos, electrónicos o físicos. La descomposición en múltiples resoluciones de la transformada wavelet tiene el potencial de incrementar la precisión de los modelos que predicen series temporales. Puede ser utilizada para analizar señales electroencefalográficas (EEG) o electrocardiográficas (ECG) en busca de patrones asociados con estados caóticos o irregulares [10].

Considerando lo anterior, este trabajo se estructuró de la forma: en la sección siguiente, una descripción general de la transformada wavelet en su versión discreta; después, una descripción general de la implementación numérica del atractor caótico con varios enrosques; posterior, el análisis que se realizó en las series temporales caóticas numéricas y, finalmente, las conclusiones.

TRANSFORMADA WAVELET

En términos matemáticos la transformada wavelet es un método alternativo y complementario a la transformada de Fourier [9]. La versión discreta de esta transformada determina la distribución de la energía de los coeficientes, con la finalidad de identificar datos de la serie de tiempo caótica que la produce; así la transformada wavelet es un método efectivo para examinar señales dinámicas que provienen de sistemas o de osciladores caóticos [11].

La Ec. (1) define la transformada wavelet continua.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (1)$$

Donde $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ es una función fija, la variable L es el espacio de funciones integrables al cuadrado en $\mathbb{R}$ y t representa el tiempo en el análisis. $a \in \mathbb{R}^+(a \neq 0)$ es un parámetro de escala o dilatación y $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro de translación. La versión discreta de esta transformada consiste en establecer una red adecuada de los parámetros de traslación y escala (a, b) . Con fines de eficiencia computacional, se lleva a cabo la discretización de los parámetros utilizando una red diádica, que se presenta en la Ec. (2).

$$a = 2^{-j} \text{ y } b = k2^{-j} = ka \quad (2)$$

Donde j y k son los índices de dilatación y translación, que pertenecen a los números enteros. La elección discreta de parámetros se tiene la Ec. (3).

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (3)$$

Al sustituir la Ec. (1) con la Ec. (2), se tiene la definición de la transformada wavelet discreta mostrada en la Ec. (4).

$$f_{j,k} = W_f(2^{-j}, k2^{-j}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (4)$$

La reconstrucción de la serie de tiempo por medio de los coeficientes $\psi_{j,k}$ forma una base ortonormal mostrada en la Ec. (5).

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (5)$$

La representación de la serie temporal en una base wavelet ortonormal hace que los cálculos analíticos y computacionales sean más sencillos. La Ec. (6) establece la contribución de la serie de tiempo en un nivel específico wavelet j .

$$f_j(t) = \sum_n f_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (6)$$

Para la implementación numérica de la transformada wavelet discreta se necesita el análisis multiresolución. Es un conjunto de técnicas proveniente de una base wavelet, es un marco matemático que relaciona la descomposición de las series de tiempo en sub-bandas. La Figura 1 presenta de manera intuitiva cómo se estructura el análisis multiresolución en la descomposición del espacio vectorial.

En el análisis multiresolución de la función wavelet, la función $\varphi(t)$ está asociada, llamada función de escala, generando una base que se observa en la Ec. (3) para los espacios V_j . Mostrando los espacios $\{W_j\}$ como el componente ortonormal de los espacios V_j , que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. La función wavelet genera una base ortonormal para los espacios W_j . Ya que $\varphi \in V_0 \subset V_1$ y que $\psi \in W_0 \subset V_1$, la función de escala y la transformada wavelet satisfacen la Ec. (7) y Ec. (8).

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \quad (7)$$

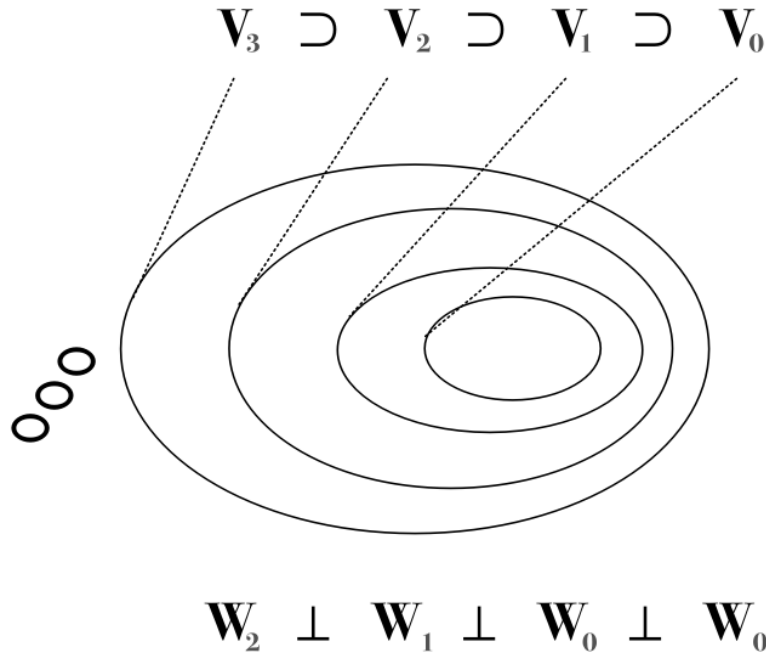


FIGURA 1. Análisis multiresolución del espacio vectorial de la función de escala $\varphi(t)$ y la transformada wavelet $\psi(t)$. Fuente: Elaboración propia.

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k) \quad (8)$$

Donde $g_k = (-1)^n h_{1-k}$, n es el número de datos que ajusta los coeficientes del vector de ajuste en la transformada y h_1 son los datos en el vector wavelet. Con base en el análisis multiresolución $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, la descomposición de una serie de tiempo finita $f \in L_2(\mathbb{R})$ es mostrada en la Ec. (9).

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2^{j_0}} c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{j-1} \sum_{k=1}^{2^j} f_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (9)$$

Donde los coeficientes correspondientes de escala y los coeficientes wavelet se pueden calcular como se muestra en la Ec. (10) y Ec. (11).

$$c_{j_0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_{j_0,k}(t) dt \quad (10)$$

$$f_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{j,k}(t)dt \quad (11)$$

Hay un número significativo de señales físicas que poseen la propiedad de invariancia en relación con la escala, estas funciones son ondas que presentan propiedades fractales. En particular, los procesos aleatorios de tipo $1/f$ son un conjunto significativo de funciones que permanecen invariables a la escala desde una perspectiva estadística [12]. Cuando se afirma que son estadísticamente autosimilares, se está aludiendo a que la señal $f(t)$ sigue la relación de escala presentada en la Ec. (12).

$$f(t) \equiv a^{-H} f(at) \quad (12)$$

Donde $a > 0$ y el símbolo de equivalencia tiene el significado que las dos señales o procesos tienen la misma estadística.

La naturaleza o estructura de la transformada wavelet en términos de tiempo y escala ha demostrado ser adecuada para analizar o examinar funciones, distribuciones o procesos que presentan propiedades autosimilares. Se puede demostrar que si una señal $f(t)$ es autosimilar, entonces su transformada en el dominio tiempo-escala también lo será. Según lo expuesto anteriormente, para este tipo de señales, la varianza de los coeficientes de wavelet $f_{j,k}$ cumple con la Ec. (13).

$$\text{var}(f_{j,k}) \approx (2^j)^{-\beta} \quad (13)$$

con $\beta = 2H + 1$, donde H es el parámetro de autosimilaridad. La relación que se presenta en la Ec. (13) se emplea para poder caracterizar diversos tipos de series temporales. Es posible establecer si la serie de tiempo se comporta como un proceso de ruido, en el que la energía está distribuida en casi todos los niveles, o si presenta una frecuencia portadora, lo cual significa que hay una gran concentración de energía en pocos niveles. La gráfica que muestra el logaritmo de la varianza de los coeficientes respecto a los niveles j permite ver a detalle el análisis wavelet, ver la Figura 3. Cuando una línea tiene casi una pendiente de cero, se le considera como si tuviera un comportamiento de ruido. Si hay uno o varios niveles adyacentes con un valor superior al de los demás, existe una alta concentración de energía en esos niveles.

ATRACTOR CAÓTICO CON MÚLTIPLES ENROSCADOS

En esta sección, se explica de manera breve cómo se implementa numéricamente el sistema caótico que puede producir una cantidad elevada de enroscados, con la finalidad de analizar las series temporales caóticas. A pesar de su simplicidad, estos sistemas presentan conductas caóticas que han sido estudiadas

extensamente en campos como la ingeniería, las matemáticas, la física y otros [13, 14].

Se toma en cuenta una clase de sistemas lineales que están determinados por la Ec. (14).

$$\dot{x} = Ax + B \quad (14)$$

Donde $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ es el estado variable, $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \in \mathbb{R}^3$ es el estado de un vector real, $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ muestra un operado lineal y los puntos de equilibrio se localizan en $x^* = -A^{-1}B$ [15]. Aplicando la perspectiva de la ecuación diferencial ordinaria lineal, expresada en la forma $\ddot{x} + \alpha_{33}\ddot{x} + \alpha_{32}\dot{x} + \alpha_{31}x + \beta_3 = 0$, es posible representar la dinámica del sistema en el espacio de estados como se muestra en la Ec. (14), que contiene a la matriz A y al vector B , los cuales están especificados en la Ec. (15).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Donde los coeficientes $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33} \in \mathbb{R}$ puede ser cualquier escalar arbitrario que asegure el sistema lineal por partes, esto es $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$, y los polinomios característicos de A dados por $g(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_{33}\lambda^2 + \alpha_{32}\lambda + \alpha_{31}$ muestra una raíz negativa y dos raíces complejas con su parte real positiva. Para los propósitos de este trabajo, se utilizan los coeficientes $\alpha_{31} = 1,5$, $\alpha_{32} = 1$ y $\alpha_{33} = 1$.

Se utiliza la señal de control de conmutación β_3 conmutada en dos valores S_1 y S_2 , hace que el sistema en la forma de la Ec. (14) presente dos equilibrios y se obtiene un doble enroscado. Al añadir más funciones lineales por partes a la señal de control para β_3 , es posible producir atractores con múltiples enroscados igual al número de señales. Una señal de control de conmutación se proporciona en términos de un solo estado, que define los límites de los dominios como hiperplanos paralelos a un eje [16].

La señal de control mostrada en la Ec. (16) puede generar un atractor caótico de doble enroscado.

$$\beta_3 = \begin{cases} S_1 = 1,8, & \text{si } x_1 \geq 0,3; \\ S_2 = -0,9, & \text{para otro caso.} \end{cases} \quad (16)$$

Los puntos de equilibrio para el sistema mostrado en la Ec. (14) usan la matriz A y el vector B definido en la Ec. (15), la señal de control está dada en la Ec. (16). Por lo tanto, se tiene que los puntos de equilibrio están dados como sigue $x_1^* = (0,6, 0, 0)^T$ y $x_2^* = (0, 0, 0)^T$.

La Figura 2(a) muestra la proyección del atractor caótico con dos enroscados en el plano (x_1, x_2)

generada por la señal de control mostrada en la Ec. (16) unida a las Ec. (14) y Ec. (15). Al cambiar la señal de control, se crea un atractor caótico con tres enroscados, que se muestra en la Ec. (17).

$$\beta_3 = \begin{cases} 0,9, & \text{si } x_1 \geq 0,3; \\ 0, & \text{si } -0,3 < x_1 < 0,3; \\ -0,9, & \text{si } x_1 \leq -0,3. \end{cases} \quad (17)$$

Notar que los puntos de equilibrio x_3^* es el negativo de x_1^* , esto produce una impresión de simetría en los atractores caóticos, como se ilustra en la Figura 2(b), que presenta la proyección del atractor caótico con tres enroscados en el plano (x_1, x_2) , las cuales son generadas por la señal de control expresada en la Ec. (17). Para seguir generando más número de enroscados en los atractores caóticos en el espacio, se utilizan las Ec. (14) y Ec. (15), agregando una señal de control. Para un atractor con cuatro enroscados se utilizó la Ec. (18) y la señal de control que se muestra en la Ec. (19) se usa para el atractor con cinco enroscados.

$$\beta_3 = \begin{cases} 1,8, & \text{si } x_1 \geq 0,9; \\ 0,9, & \text{si } 0,3 \leq x_1 < 0,9; \\ 0, & \text{si } -0,3 < x_1 < 0,3; \\ -0,9, & \text{si } x_1 \leq -0,3. \end{cases} \quad (18)$$

$$\beta_3 = \begin{cases} 1,8, & \text{si } x_1 \geq 0,9; \\ 0,9, & \text{si } 0,3 \leq x_1 < 0,9; \\ 0, & \text{si } -0,3 < x_1 < 0,3; \\ -0,9, & \text{si } -0,9 < x_1 \leq -0,3; \\ -1,8, & \text{si } x_1 \leq -0,9. \end{cases} \quad (19)$$

Se introducen los puntos de equilibrio localizados en $x_4^* = (1,2, 0, 0)^T$ unidos a los puntos fijos anteriores y $x_5^* = (-1,2, 0, 0)^T$. Los valores de los puntos fijos se pueden decir que se toman a conveniencia de la investigación o limitación del espacio donde se quiera generar los atractores. La proyección del atractor caótico con cuatro enroscados se observa en la Figura 2(c) y la proyección del atractor caótico con cinco enroscados se muestra en la Figura 2(d).

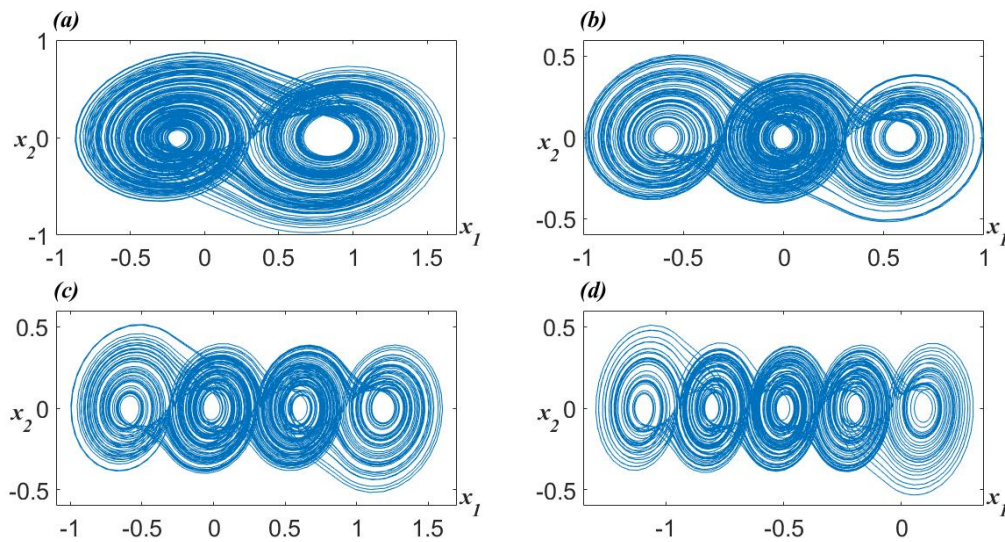


FIGURA 2. Múltiples Enroscados. Fuente: Elaboración propia con MATLAB.

ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO CAÓTICAS

Se investigaron las series de tiempo caóticas producidas por el sistema que tiene la capacidad de mostrar diversos enroscados, como se muestra en la Figura 2. En el análisis se hace uso de la transformada wavelet, la cual se aplica a las series de tiempo caóticas generadas por el sistema antes discutido. La manera de interpretar los resultados se fundamenta en cómo se distribuye la energía de los coeficientes obtenidos a lo largo de distintos niveles de resolución. Lo anterior es para evaluar si la distribución de energía en los distintos niveles aporta datos extra al estudio de series temporales caóticas, como se ilustra en la Figura 3.

Se evaluaron diversas series temporales en varios estudios, determinando características basadas en la naturaleza de la información. Este trabajo se basa en el estudio de series temporales con comportamiento caótico, las cuales fueron generadas por diversas simulaciones realizadas en Matlab. Fundamentalmente, el análisis de una serie temporal caótica nos permitirá determinar ciertas propiedades o características del tipo de información que se examina. Para determinar el comportamiento de las series temporales caóticas, hemos hecho las siguientes observaciones:

1. Si en la representación semi-logarítmica de la varianza hay un máximo de forma notoria, significa que existe una alta concentración de energía en ese nivel y en los niveles adyacentes, lo que sugiere que la serie temporal presenta una frecuencia portadora.
2. Si se observa una tendencia de línea horizontal (gradiente cero) en la gráfica semi-logarítmica de

la varianza, significa que la concentración de energía no está en un nivel o niveles, lo cual resulta en un comportamiento similar al ruido gaussiano.

3. En una gráfica semi-logarítmica de la varianza, si se observa una tendencia de línea con pendiente negativa, esto señala que existe un comportamiento fractal en la serie temporal.

Por lo anterior, se debe considerar que el logaritmo de la varianza en relación con los niveles comienza en la conexión presentada en la Ec. (13), en los que se incluyen el nivel de resolución j , los coeficientes $f_{j,k}$ y la auto-similaridad β . El objetivo de este trabajo es detallar cómo se comportan las series de tiempo caóticas cuando exhiben un comportamiento con múltiples enroscamientos, tal y como se presentó en secciones previas.

El análisis de las series temporales de múltiples enroscados del estado x_1 se presenta en la Figura 3(a). Los resultados revelan que el sistema con dos enroscados tiene una energía predominante a nivel $j = 10$, lo cual sugiere que hay energía portadora en este estado. Cuando se incrementan los enroscados, la energía tiende a comportarse de manera parecida en todos los sistemas con más de dos enroscados. En la Figura 3(b) se presenta el análisis del estado x_2 , donde en el sistema con dos enroscados hay una energía destacada a nivel $j = 12$, lo que indica que su comportamiento no es similar al de los sistemas con más enroscados. La Figura 3(c) presenta un análisis de todos los sistemas en la condición x_3 . Como en los demás estados, el sistema con más energía es el que tiene dos enroscados, específicamente en las posiciones $j = 12$ y $j = 13$; estos niveles son los que poseen mayor energía, así que su combinación nos proporcionará una reconstrucción más precisa de la señal original.

Se observa en la Figura 3 que los niveles de energía experimentan cambios a medida que aumentan los enroscados, especialmente en el estado x_1 , que es el espacio de fase donde estos últimos se incrementan. Cuando el sistema aumenta la cantidad de enroscados, la evolución de los niveles de energía es casi idéntica: se pasa de una pendiente positiva a una negativa, lo que indica que, al llevar a cabo el recorrido por los enroscados, su comportamiento se vuelve fractal.

En los niveles de energía es muy similar, pasan de tener pendiente positiva a tener pendiente negativa, lo que significa que al momento de realizar el recorrido por los enroscados su comportamiento se convierte en un comportamiento fractal. El análisis con la transformada wavelet se utiliza en las series temporales que produce el sistema caótico de tres enroscados que aparece en la Figura 2(b). A continuación, se presenta el análisis de la serie temporal con un comportamiento caótico para este sistema.

Se examinará la serie de tiempo caótica del estado x_1 (ver Figura 2(b)), que será el fundamento para observar cómo se comporta la serie temporal generada por este tipo de sistemas. Se toma en cuenta una longitud o tamaño de la serie temporal numérica de 32768 datos en el análisis, que está relacionada

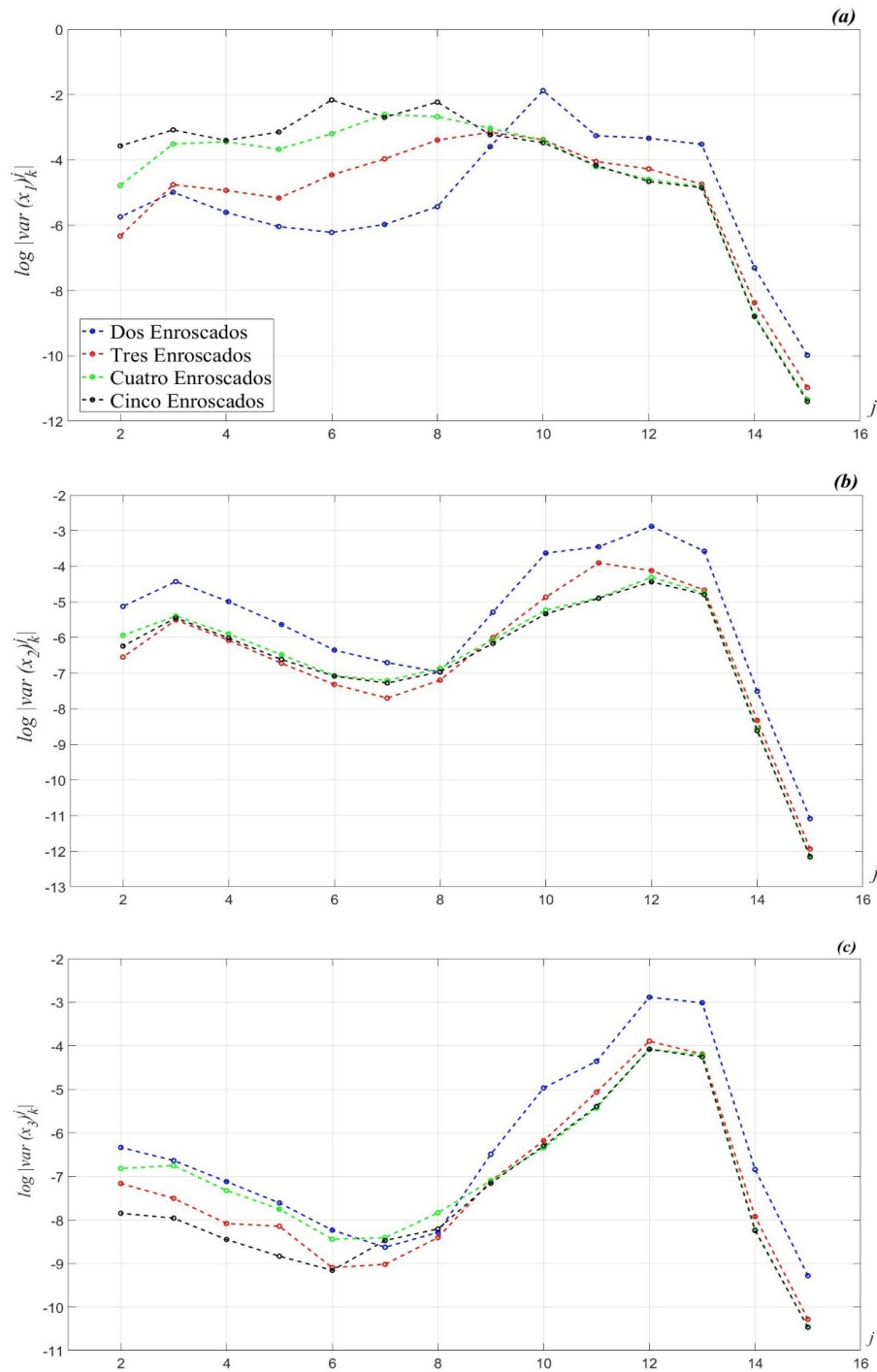


FIGURA 3. Análisis de series de tiempo generadas con Múltiples Enrosados con la Transformada Wavelet. Fuente: Elaboración propia con MATLAB.

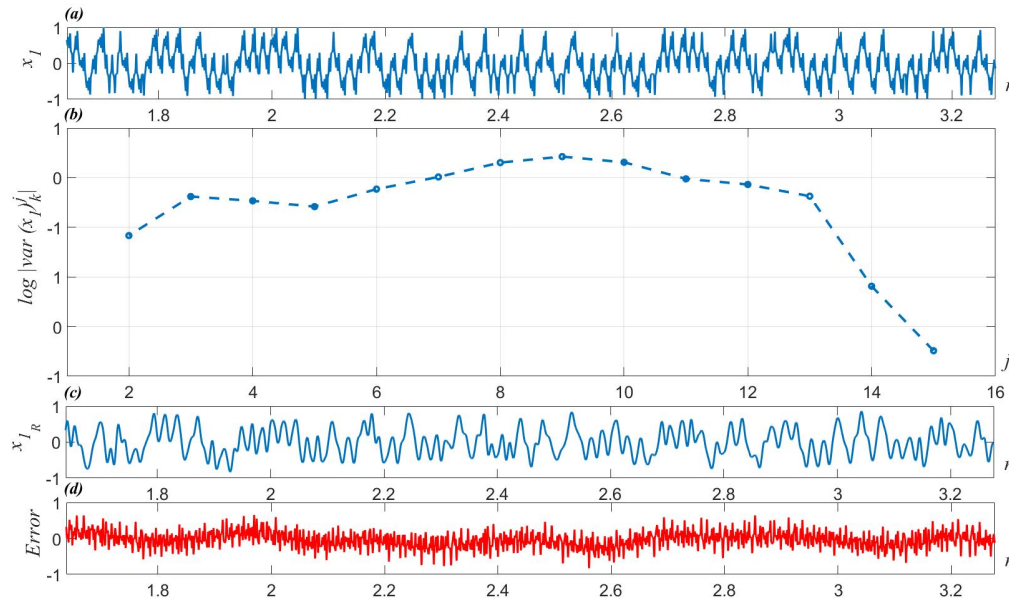


FIGURA 4. (a) Datos numéricos del estado x_1 , (b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, (c) reconstrucción del estado con 4 niveles de lo coeficiente, (d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido. Fuente: Elaboración propia con MATLAB.

con la cantidad de niveles a transformar; es decir, el número de niveles para tener en cuenta es $m = \log_2(32768) = 15$, donde en esta se presentan los resultados alcanzados para este estado.

La Figura 4(a) presenta la información del estado x_1 , en tanto que el logaritmo de la varianza del coeficiente del estado transformado con respecto al nivel j aparece en la Figura 4(b). Se empleó la función *Daubechies db8* para llevar a cabo la transformada wavelet. Se puede apreciar que hasta el nivel $j = 9$, la energía es alta en comparación con los otros niveles, pero el comportamiento es parecido al del ruido (una pendiente próxima a cero). Luego del nivel $j = 9$ a $j = 15$, se presenta una conducta de tipo fractal. Como conclusión de lo anterior, se puede afirmar que no existe una concentración de energía en pocos niveles específicos. En realidad, se llevó a cabo una reconstrucción del estado x_1 mediante la suma de los niveles del coeficiente de la transformada wavelet desde $j = 8$ hasta $j = 11$, como se muestra en la Figura 4(c).

Finalmente, la Figura 4(d) presenta el error que existe entre el estado original y el estado que fue reconstruido por los cuatro niveles. Se puede observar que se presenta un error algo oscilante con una amplitud del 25 %, lo que significa que la energía está repartida en más niveles, por lo tanto, se deben considerar más niveles para reducir el error.

Los resultados se presentan en la Figura 5, que muestra el mismo análisis realizado al estado x_2 . La Figura 5(a) muestra la información del estado x_2 , mientras que la Figura 5(b) presenta el logaritmo

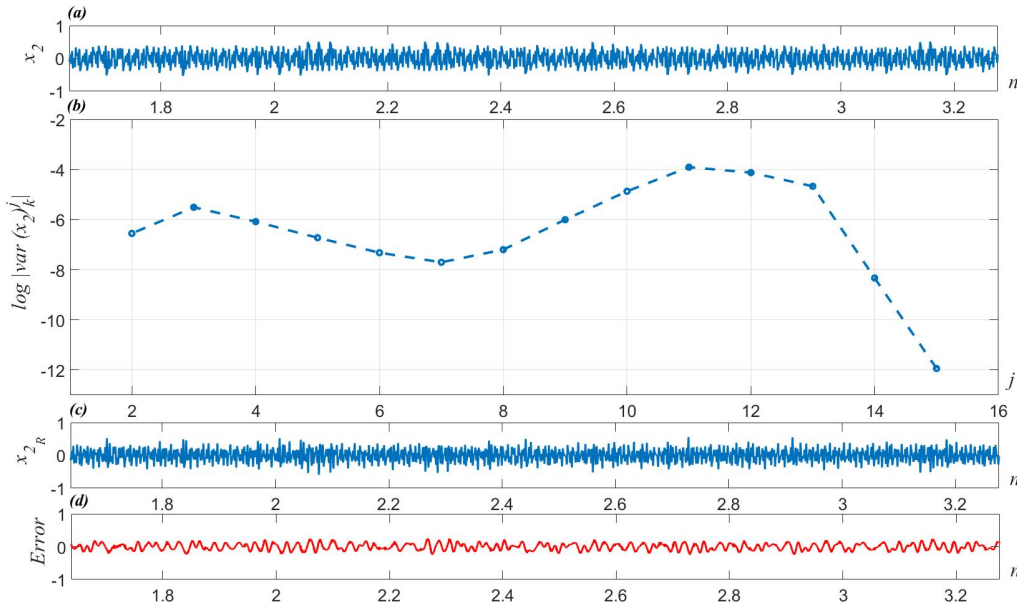


FIGURA 5. (a) Datos numéricos del estado x_2 , (b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, (c) reconstrucción del estado con 3 niveles de lo coeficiente, (d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido. Fuente: Elaboración propia con MATLAB.

correspondiente de la varianza de los coeficientes en función del nivel j . En este caso, se observa un incremento significativo en el nivel $j = 11$; por lo tanto, es necesario comprobar si este nivel tiene relevancia. Como la amplitud de los niveles $j = 12$ y $j = 13$ está muy cerca de la del nivel $j = 11$, se tomaron en cuenta estos tres niveles para reconstruir el estado x_2 . La frecuencia portadora se observa en la Figura 5(c), que ilustra una reconstrucción, así como una alta concentración de energía en los tres niveles. La Figura 5(d) muestra que el error confirma lo anterior para x_2 .

Se examina la condición x_3 en la Figura 6. La Figura 6(a) ilustra los datos producidos por el estado x_3 . La Figura 6(b) muestra el análisis estadístico mediante la transformada wavelet, observando un nivel destacado, así como una portadora caótica o frecuencia fundamental. En la Figura 6(c) se observa la reconstrucción de serie de tiempo con dos niveles $j = 12$ y $j = 13$, que se muestran como los dos niveles con más energía en los niveles wavelet. El error de la comparación de las series de tiempo original-reconstruida se observa en la Figura 6(d).

Como resultado se tienen que para un sistema con tres enroscados ver Figura 2(b), su distribución de energía en el estado x_1 necesita para la reconstrucción cuatro niveles. En el estado x_2 , tiene energía sobresaliente en tres niveles. Para el estado x_3 tiene energía de portadora en dos niveles. Se debe destacar que con un número mayor de enroscados ($n > 2$), el comportamiento de los sistemas es muy similar en todos sus estados y se dirigen al aumentar los enroscados a que los niveles de energía lleguen a tener un

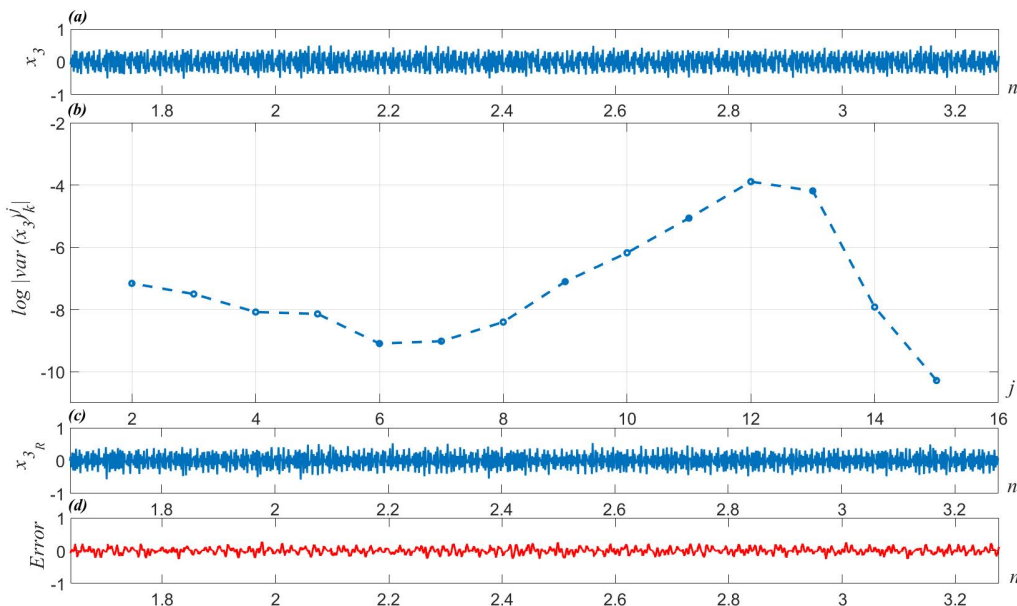


FIGURA 6. (a) Datos numéricos del estado x_3 , (b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, (c) reconstrucción del estado con 2 niveles de los coeficientes, (d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido. Fuente: Elaboración propia con MATLAB.

comportamiento con pendiente negativa, lo que significa un comportamiento fractal.

CONCLUSIONES

Se realizó una implementación numérica de un sistema caótico con múltiples enroscados, además de su correspondiente análisis, con el objetivo de determinar los parámetros que impidan una operación sólida del sistema. Además, se realizó un estudio de las series temporales generadas por el sistema caótico con la transformada wavelet, para sistemas con diferente cantidad de enroscados.

Con este análisis se concluye lo siguiente: Primero, se puede afirmar que la transformada wavelet es una útil herramienta matemática para el análisis de señales a través de la distribución de energía en variados niveles de resolución. La aplicación de la transformada wavelet para el análisis de series temporales posibilitó determinar propiedades o características del tipo de señal en cuestión, así como una conducta específica en la distribución de energía. Los resultados de esas series temporales con una dinámica caótica son muy parecidos; su interpretación del comportamiento correspondiente permitió obtener una propiedad del sistema caótico.

Segundo, se observó que el comportamiento es muy parecido en el estado x_1 , que es la zona de fase donde se nota el crecimiento de los enroscados, cuando se incrementa la cantidad de estos. Esta conducta transforma su dinámica de una pendiente positiva (con poca inclinación) a una negativa. Puede afirmarse que, al tener más enroscados, el atractor presenta un comportamiento fractal y en los estados donde el

atractor no crece, la distribución de la energía en los diversos niveles de resolución es muy parecida.

Tercero, las series temporales caóticas de los estados x_2 y x_3 presentan un comportamiento semejante en lo que se refiere a la distribución de energía en función de los niveles de resolución. En realidad, se exhiben dos tipos de comportamientos distintos: la frecuencia portadora y el ruido gaussiano. La frecuencia portadora aparece en dos o tres estados que se observan bien en el análisis, después de lo cual ocurre un comportamiento fractal. Por otro lado, la conducta tipo ruido se distingue por tener un gradiente cero en el gráfico semi-logarítmico del logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet respecto a los niveles de resolución j .

Se concluye que las series de tiempo caóticas contienen una frecuencia portadora cuando la gráfica semi-logarítmica muestra unos pocos niveles de gran amplitud. Lo anterior se comprende al notar que la concentración energética es más alta en unos pocos niveles, puesto que tienen la contribución de la dinámica. Gracias al estudio con la transformada wavelet, sería posible explicar que, en un sistema bajo análisis, se puede restablecer el estado o la señal. Se ha podido identificar que el sistema caótico con múltiples enroscados presenta diversas clases de comportamiento para distintos niveles de resolución.

Finalmente, se concluye que es posible analizar la concentración energética en el estado en que se puede modular y utilizar la información para determinar estados precisos que enmascaren la información. Un trabajo futuro podría ser integrar una fase de encriptación con el ocultamiento natural del sistema caótico para emplearlo como un medio de comunicación seguro.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE AUTORES Y COLABORADORES

Eduardo Jiménez-López: Conceptualización, Metodología, Software, Preparación del borrador original, Redacción - Revisión y Edición. **Nely Plata-Cesar:** Conceptualización, Metodología, Software, Redacción - Preparación del borrador original.

REFERENCIAS

- [1] W. Wu, S. Deng, C. Chen, and H. Su, “Unraveling multi-scale dynamics of estuarine wetland vegetation using the multi-resolution analysis wavelet transform and the landsat time-series,” *Ecological Indicators*, vol. 158, p. 111342, 2024.
- [2] C. Touzé, A. Vizzaccaro, and O. Thomas, “Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 105, no. 2, pp. 1141–1190, 2021.
- [3] A. Mashuri, N. H. Adenan, N. S. Abd Karim, S. W. Tho, and Z. Zeng, “Application of chaos theory in different fields-a literature review,” *Journal of Science and Mathematics Letters*, vol. 12, no. 1, pp. 92–101, 2024.

- [4] A. Szczęsna, D. R. Augustyn, H. Josiński, K. Harężlak, A. Świtoński, and P. Kasprowski, “Chaotic biomedical time signal analysis via wavelet scattering transform,” *Journal of Computational Science*, vol. 72, p. 102080, 2023.
- [5] Z. Tian, “Analysis and research on chaotic dynamics behaviour of wind power time series at different time scales,” *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, vol. 14, no. 2, pp. 897–921, 2023.
- [6] J. Hu, Y. Hu, W. Chen, M. Jin, S. Pan, Q. Wen, and Y. Liang, “Attractor memory for long-term time series forecasting: A chaos perspective,” *arXiv preprint arXiv:2402.11463*, 2024.
- [7] P. C. Li, F. Zhang, L. Gao, Y. Q. Liu, and X. Y. Ren, “A novel model for chaotic complex time series with large of data forecasting,” *Knowledge-Based Systems*, vol. 222, p. 107009, 2021.
- [8] L. P. Arts and E. L. Van den Broek, “The fast continuous wavelet transformation (fcwt) for real-time, high-quality, noise-resistant time–frequency analysis,” *Nature Computational Science*, vol. 2, no. 1, pp. 47–58, 2022.
- [9] T. Guo, T. Zhang, E. Lim, M. Lopez-Benitez, F. Ma, and L. Yu, “A review of wavelet analysis and its applications: Challenges and opportunities,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 58 869–58 903, 2022.
- [10] A. Kumar, H. Tomar, V. K. Mehla, R. Komaragiri, and M. Kumar, “Stationary wavelet transform based ecg signal denoising method,” *ISA Transactions*, vol. 114, pp. 251–262, 2021.
- [11] P. P. Vaidyanathan and I. Djokovic, “Wavelet transforms,” in *Mathematics for Circuits and Filters*. CRC Press, 2022, pp. 131–216.
- [12] V. P. Koverda and V. N. Skokov, “Random process with a turbulent power spectrum,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 612, p. 128491, 2023.
- [13] Y. Wu, C. Wang, and Q. Deng, “A new 3d multi-scroll chaotic system generated with three types of hidden attractors,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 230, no. 7, pp. 1863–1871, 2021.
- [14] Y. Yang, L. Huang, N. V. Kuznetsov, and Q. Lai, “Design and implementation of grid-wing hidden chaotic attractors with only stable equilibria,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 70, no. 12, pp. 5408–5420, 2023.
- [15] F. Li and J. Zeng, “Multi-scroll attractor and multi-stable dynamics of a three-dimensional jerk system,” *Energies*, vol. 16, no. 5, p. 2494, 2023.

- [16] C. Li, W. Hu, J. C. Sprott, and X. Wang, “Multistability in symmetric chaotic systems,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 224, no. 8, pp. 1493–1506, 2015.