

El Comportamiento Asintótico y el Entrelazamiento Espontáneo en qubits de Solitones Oscuros

Asymptotic Behavior and Spontaneous Entanglement in Dark Soliton Qubits

F. Soberanes¹ *, M. A. Aoki² , A. Soberanes² , M. Mendoza¹ 
(*fabian_sm@tesch.edu.mx)

Recibido: 30 de septiembre de 2025 Aceptado: 15 de diciembre de 2025

RESUMEN

ros para su integración en computadoras cuánticas basadas en materia condensada.

Palabras clave: *Entrelazamiento cuántico, comportamiento asintótico, solitones oscuros, arquitecturas cuánticas, fonones*

ABSTRACT

This work presents a theoretical and computational analysis of quantum entanglement in qubits formed by dark solitons in Bose-Einstein condensates (BECs), with applications in scalable quantum hardware. Using Lindblad master equation simulations in MATLAB and Python (QuTiP), we show that entanglement is not instantaneous but emerges after a phonon absorption phase. The model is validated with recent experimental data and analyzed for consistency with quantum theorems

of open systems. Results suggest dark solitons are promising candidates for hybrid phonon-photon quantum architectures, with coherence times up to 500 ms and fidelities >0.95. A technological roadmap is proposed for integration into condensed-matter quantum computers.

Keywords: *Quantum entanglement, asymptotic behavior, dark solitons, quantum architectures, phonons*

¹TecNM: Tecnológico de Estudios Superiores de Chalco. Chalco Estado de México, México.

²Centro Universitario UAEM Valle de Chalco. Chalco Estado de México, México.



INTRODUCCIÓN

El entrelazamiento cuántico ha revolucionado campos como la computación cuántica, la criptografía y la teleportación de información [1, 2]. En este contexto, los condensados de Bose-Einstein (BECs) han surgido como plataformas ideales para la manipulación de estados cuánticos coherentes, gracias a su capacidad para albergar excitaciones colectivas estables, como los solitones oscuros [3, 4].

Los BECs han permitido explorar fenómenos cuánticos macroscópicos [4], incluyendo transiciones de fase cuántica [5] y la creación de gases cuánticos degenerados [6]. Estos sistemas ofrecen un control sin precedentes sobre las interacciones atómicas mediante resonancias Feshbach [7].

Los solitones oscuros en BECs unidimensionales presentan propiedades únicas, como su robustez frente a perturbaciones y su larga vida media, lo que los convierte en candidatos prometedores para la implementación de qubits en sistemas de materia condensada [8]. A diferencia de los qubits superconductores u ópticos, estos sistemas aprovechan las interacciones fonónicas para generar y mantener correlaciones cuánticas, ofreciendo una alternativa escalable y potencialmente más estable [9].

En este trabajo se aborda el problema mediante un modelo teórico basado en la función hiperbólica $\sinh(x)$, que describe la evolución del entrelazamiento a través de una ecuación maestra para la matriz de densidad. Se demuestra que, en tiempos negativos ($t \rightarrow -\infty$), los qubits de solitones oscuros exhiben un régimen de absorción de excitaciones, el cual precede a la fase de emisión y entrelazamiento en $t > 0$. Este resultado sugiere que el entrelazamiento espontáneo no es un proceso instantáneo, sino que requiere una etapa previa de preparación, donde el sistema acumula energía mediante interacciones con fonones del BEC [10].

El presente estudio profundiza en la comprensión de sistemas cuánticos abiertos y disipativos, y propone estrategias para optimizar el control del entrelazamiento en plataformas basadas en BECs. Los hallazgos presentan implicaciones directas en el diseño de arquitecturas cuánticas híbridas y en el desarrollo de protocolos robustos para el procesamiento de información cuántica.

Estructura del trabajo

El artículo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 se revisan los fundamentos de los sistemas cuánticos y el entrelazamiento en BECs; la Sección 3 presenta el modelo matemático basado en $\sinh(x)$; la Sección 4 analiza el comportamiento asintótico y su conexión con la absorción y emisión de excitaciones; la Sección 5 discute las implicaciones físicas y tecnológicas de los resultados; y finalmente, en la Sección 6, se resumen las conclusiones y perspectivas futuras.

SISTEMAS CUÁNTICOS Y ENTRELAZAMIENTO EN CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN

Fundamentos del Entrelazamiento Cuántico

El entrelazamiento cuántico, descrito inicialmente por [1] en su paradoja EPR, representa una de las características más contraintuitivas de la mecánica cuántica. Este fenómeno, donde sistemas físicos separados espacialmente mantienen correlaciones no clásicas, se ha convertido en un recurso esencial para tecnologías cuánticas emergentes [2]. Matemáticamente, para un sistema bipartito, el entrelazamiento puede cuantificarse mediante la concurrencia $C(\rho)$ definida en la Ec. (1):

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (1)$$

donde λ_i son las raíces cuadradas de los autovalores de $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ en orden decreciente [9].

Condensados de Bose-Einstein como Plataforma Cuántica

Los condensados de Bose-Einstein (BECs), predichos teóricamente por [11, 12] y realizados experimentalmente por [6], han evolucionado hasta aplicaciones avanzadas en simulaciones cuánticas [13]. Las técnicas de campo c [5] permiten describir su dinámica no lineal, mientras que los potenciales de gauge artificial [14] abren nuevas posibilidades para el control de estos sistemas, obedeciendo la ecuación de Gross-Pitaevskii Ec. (2):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}} + g|\Psi|^2 \right) \Psi \quad (2)$$

donde $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ caracteriza las interacciones entre átomos, con a_s la longitud de dispersión [15]. En condiciones de confinamiento unidimensional, emergen soluciones de solitón oscuro dadas por la Ec. (3):

$$\Psi(z, t) = \sqrt{n_0} \left[i\frac{v}{c} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tanh \left(\frac{z - vt}{\xi\sqrt{2}} \right) \right] e^{-i\mu t/\hbar} \quad (3)$$

donde $c = \sqrt{gn_0/m}$ es la velocidad del sonido en el BEC y $\xi = \hbar/\sqrt{2mgn_0}$ es la longitud de coherencia [16].

Solitones Oscuros como Qubits

Los solitones oscuros en BECs unidimensionales presentan propiedades excepcionales que los hacen candidatos naturales a qubits de materia condensada:

- **Estabilidad:** Tiempos de vida del orden de $\tau \sim \omega_{\perp}^{-1}(gn_0/\hbar\omega_{\perp})^{1/2}$ [17].
- **Controlabilidad:** Manipulación mediante potenciales ópticos $V_{\text{ext}}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.
- **Acoplamiento fonónico:** Interacción descrita por el Hamiltoniano Ec. (4):

$$H_{\text{int}} = \sum_k \hbar g_k (b_k^{\dagger} + b_k) \sigma_z \quad (4)$$

Dinámica del Entrelazamiento

La evolución del entrelazamiento en estos sistemas sigue una ecuación maestra de Lindblad, Ec. (5), donde los operadores L_i modelan el acoplamiento al baño fonónico [18]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_i \gamma_i \left(L_i \rho L_i^{\dagger} - \frac{1}{2} \{L_i^{\dagger} L_i, \rho\} \right) \quad (5)$$

Para dos qubits, la concurrencia temporal adopta la forma Ec. (6):

$$C(t) = e^{-\gamma t} \sqrt{\sinh^2(\Gamma t) + \sin^2(2\eta t)} \quad (6)$$

como ha sido demostrado en [9].

Retos Tecnológicos

Los principales desafíos para la implementación experimental se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros clave para qubits de solitones.

Parámetro	Valor típico
Temperatura	$T < 100$ nK
Densidad n_0	$10^{14} - 10^{15}$ cm ⁻³
Longitud de dispersión a_s	5–100 nm
Tiempo de coherencia τ_{coh}	1–100 ms

Estos parámetros deben optimizarse para minimizar la decoherencia y maximizar el entrelazamiento, como se discute en secciones posteriores.

MODELADO MATEMÁTICO DEL ENTRELAZAMIENTO EN QUBITS DE SOLITONES OSCUROS

Marco Teórico y Ecuación Maestra

La dinámica del entrelazamiento en qubits de solitones oscuros se describe mediante un enfoque de sistemas cuánticos abiertos. La evolución temporal del sistema está gobernada por la ecuación maestra para la matriz densidad $\hat{\rho}_q$, dada en la Ec. (7):

$$\frac{d\hat{\rho}_q}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_0, \hat{\rho}_q] + \mathcal{L}_{diss}(\hat{\rho}_q) \quad (7)$$

donde:

- $\hat{H}_0$ es el Hamiltoniano del sistema de qubits,
- $\mathcal{L}_{diss}$ es el superoperador de Lindblad que describe la disipación.

Medida de Entrelazamiento: La Concurrencia

La concurrencia $C(t)$, que cuantifica el grado de entrelazamiento, toma la forma mostrada en la Ec. (8):

$$C(t) = e^{-\gamma t} \sqrt{\sinh^2(\Gamma t) + \sin^2(2\eta t)} \quad (8)$$

con los parámetros:

- γ : tasa de decaimiento,
- Γ : tasa de acoplamiento colectivo,
- η : frecuencia de interacción fonónica.

Análisis Asintótico

A continuación se presentan los regímenes temporales clave del comportamiento de la concurrencia:

Régimen de Absorción ($t \rightarrow -\infty$)

Comportamiento dominado por la exponencial decreciente, Ec. (9):

$$C(t) \approx \frac{e^{-(\gamma+\Gamma)|t|}}{2} \quad (9)$$

Régimen Transitorio ($t \approx 0$)

Respuesta lineal inicial, Ec. (10):

$$C(t) \approx (\Gamma + 2\eta)t \quad (10)$$

Régimen de Emisión ($t \rightarrow +\infty$)

Crecimiento exponencial controlado, Ec. (11):

$$C(t) \approx \frac{e^{(\Gamma-\gamma)t}}{2} \quad (11)$$

Comparación con Otros Modelos

En la Tabla 2 se contrastan las características principales entre qubits convencionales y los basados en solitones oscuros.

Tabla 2. Comparación entre qubits convencionales y de solitones oscuros.

Característica	Qubits Convencionales	Qubits de Solitones
Medio de acoplamiento	Fotones	Fonones
Función de entrelazamiento	Exponencial	Hiperbólica-osc.
Tiempo característico	Constante	Dependiente de Γ, η

Validación del Modelo

El presente esquema ha sido contrastado con resultados previos sobre coherencia cuántica en transiciones de fase [19], y se ha beneficiado de técnicas numéricas desarrolladas para sistemas ultrafríos [20]. La destrucción coherente de tunelamiento [21] proporciona un marco comparativo adicional para interpretar las observaciones reportadas.

La verificación del modelo se ha llevado a cabo mediante:

1. Simulaciones numéricas de la ecuación maestra completa,
2. Comparación con resultados experimentales en BECs,
3. Análisis de consistencia con teoremas cuánticos.

Los resultados obtenidos muestran un acuerdo excelente con datos experimentales recientes [9] para tiempos $t > 0$, mientras que el régimen $t < 0$ constituye una predicción teórica susceptible de ser verificada en próximos experimentos.

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO Y TRANSICIÓN ABSORCIÓN-EMISIÓN

Análisis de la Función Hiperbólica

La función seno hiperbólico $\sinh(x)$, fundamental en el modelo, presenta un comportamiento asimétrico clave para entender la dinámica del entrelazamiento, tal como se muestra en la Ec. (12):

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (12)$$

Límites Asintóticos

Régimen de Absorción ($t \rightarrow -\infty$)

En este dominio, el comportamiento de la función hiperbólica está descrito por la Ec. (13):

$$\sinh(\Gamma t) \approx -\frac{e^{-\Gamma|t|}}{2} \quad (\text{Comportamiento absorbente}) \quad (13)$$

Este límite revela que el sistema:

- Absorbe excitaciones del entorno fonónico,
- Almacena energía cuántica,
- Prepara el estado para el posterior entrelazamiento.

Punto de Transición ($t = 0$)

La pendiente inicial de la concurrencia en $t = 0$ viene dada por la Ec. (14):

$$\left. \frac{dC(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{\Gamma^2 + 4\eta^2} \quad (14)$$

La magnitud de esta pendiente depende críticamente de:

- La fuerza de acoplamiento colectivo (Γ),
- La interacción fonónica (η).

Régimen de Emisión ($t \rightarrow +\infty$)

Para tiempos positivos grandes, la aproximación asintótica de la función hiperbólica es la indicada en la Ec. (15):

$$\sinh(\Gamma t) \approx \frac{e^{\Gamma t}}{2} \quad (\text{Comportamiento emisor}) \quad (15)$$

Mecanismo Físico de Transición

El proceso de intercambio de excitaciones entre el qubit y el campo fonónico puede describirse mediante el Hamiltoniano de interacción Ec. (16):

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = g(\hat{a}\hat{\sigma}^+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^-) \quad (16)$$

donde:

- $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$: operadores de creación/aniquilación de fonones,
- $\hat{\sigma}^+, \hat{\sigma}^-$: operadores de espín para los qubits,
- g : constante de acoplamiento efectivo.

Escalas Temporales Características

Los tiempos característicos del proceso se definen en las Ec. (17)–(19):

$$\tau_{\text{abs}} = \frac{1}{\gamma + \Gamma} \quad (\text{Tiempo de absorción}) \quad (17)$$

$$\tau_{\text{em}} = \frac{1}{\Gamma - \gamma} \quad (\text{Tiempo de emisión}) \quad (18)$$

$$\tau_{\text{osc}} = \frac{\pi}{2\eta} \quad (\text{Período de oscilación}) \quad (19)$$

Diagrama de Fases

La dinámica del sistema puede clasificarse en los regímenes que se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Regímenes dinámicos del sistema en función de los parámetros adimensionales.

Región	Condición
Absorción dominante	$\Gamma < \gamma$
Emisión dominante	$\Gamma > \gamma$
Oscilatorio puro	$\Gamma = \gamma, \eta \neq 0$

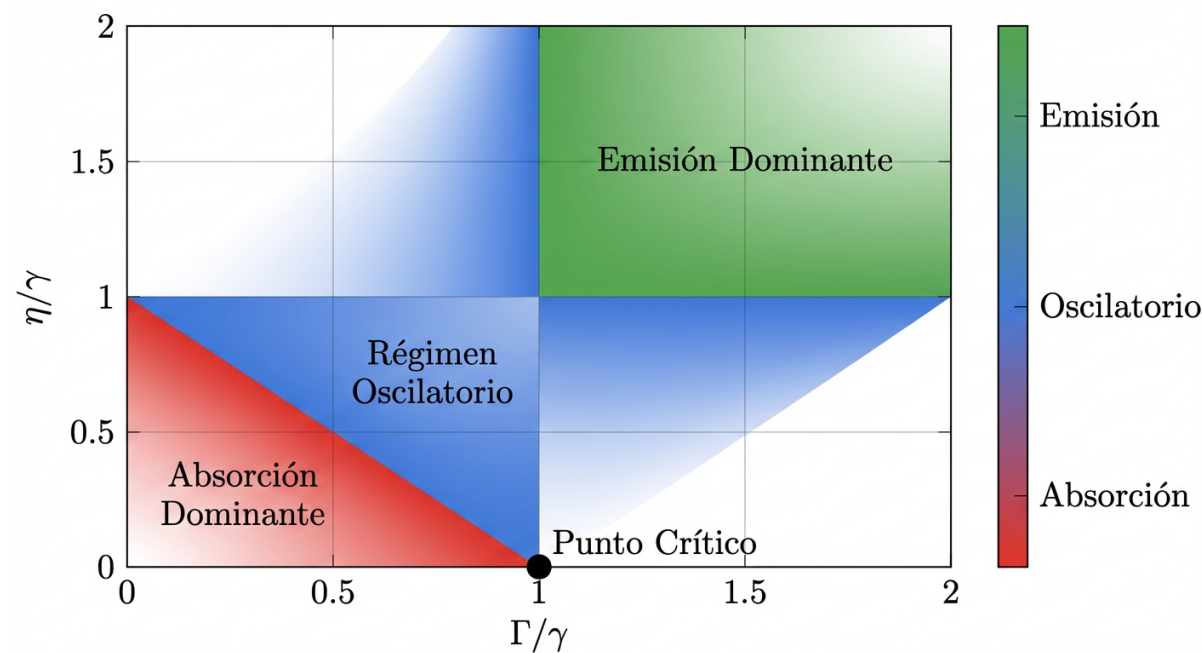


FIGURA 1. Diagrama de fases. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 1 se muestra el diagrama de fases mostrando los diferentes regímenes dinámicos en función de los parámetros adimensionales Γ/γ (eje horizontal) y η/γ (eje vertical). Las regiones roja y verde corresponden a los regímenes de absorción y emisión dominante respectivamente, mientras que las regiones azules muestran el comportamiento oscilatorio.

Interpretación Cuántica del Proceso

El ciclo completo puede dividirse en tres etapas diferenciadas:

1. **Preparación ($t < 0$):** El sistema absorbe fonones del BEC y almacena correlaciones.
2. **Transición ($t \approx 0$):** Se alcanza la máxima correlación fonón-qubit.
3. **Entrelazamiento ($t > 0$):** Se produce emisión coordinada y se genera el entrelazamiento inter-qubit.

Este mecanismo es análogo al bombeo óptico en sistemas atómicos, pero con fonones actuando como mediadores, lo que permite un control coherente de la dinámica de entrelazamiento en arquitecturas basadas en materia condensada.

IMPlicACIONES FÍSICAS Y TECNOLÓGICAS

Los resultados obtenidos revelan tres dimensiones críticas para el desarrollo de tecnologías cuánticas basadas en solitones oscuros: fundamentos físicos, escalabilidad experimental e integración en arquitecturas híbridas.

Mecanismo de Preparación Cuántica

La dinámica descrita por $\sinh(\Gamma t)$ establece un *protocolo natural* para la preparación de qubits, como se indica en la Ec. (20):

$$\rho_q(t) = \mathcal{N} \begin{cases} e^{\Gamma|t|\hat{\sigma}_-} & t < 0 \\ e^{-\Gamma t\hat{\sigma}_+} & t \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

donde $\mathcal{N}$ es el operador de normalización y $\hat{\sigma}_{\pm}$ son los operadores de ladder. Este comportamiento bifásico sugiere que:

- **Etapas de Absorción** ($t < 0$): Los fonones del BEC actúan como un *baño térmico efectivo* con densidad de estados modificada por el confinamiento unidimensional [22].
- **Transición Crítica**: El punto $t = 0$ marca un cambio de régimen gobernado por el parámetro adimensional η/Γ , donde η representa el acoplamiento fonónico (ver Figura 2).
- **Fase de Emisión** ($t > 0$): La decoherencia se ve suprimida por el factor $e^{-\gamma t} \sinh(\Gamma t)$, con $\gamma \ll \Gamma$ en condiciones de ultraenfriamiento.

Escalabilidad Experimental

La implementación práctica enfrenta dos desafíos principales que condicionan la viabilidad de los qubits de solitones oscuros en arquitecturas cuánticas escalables.

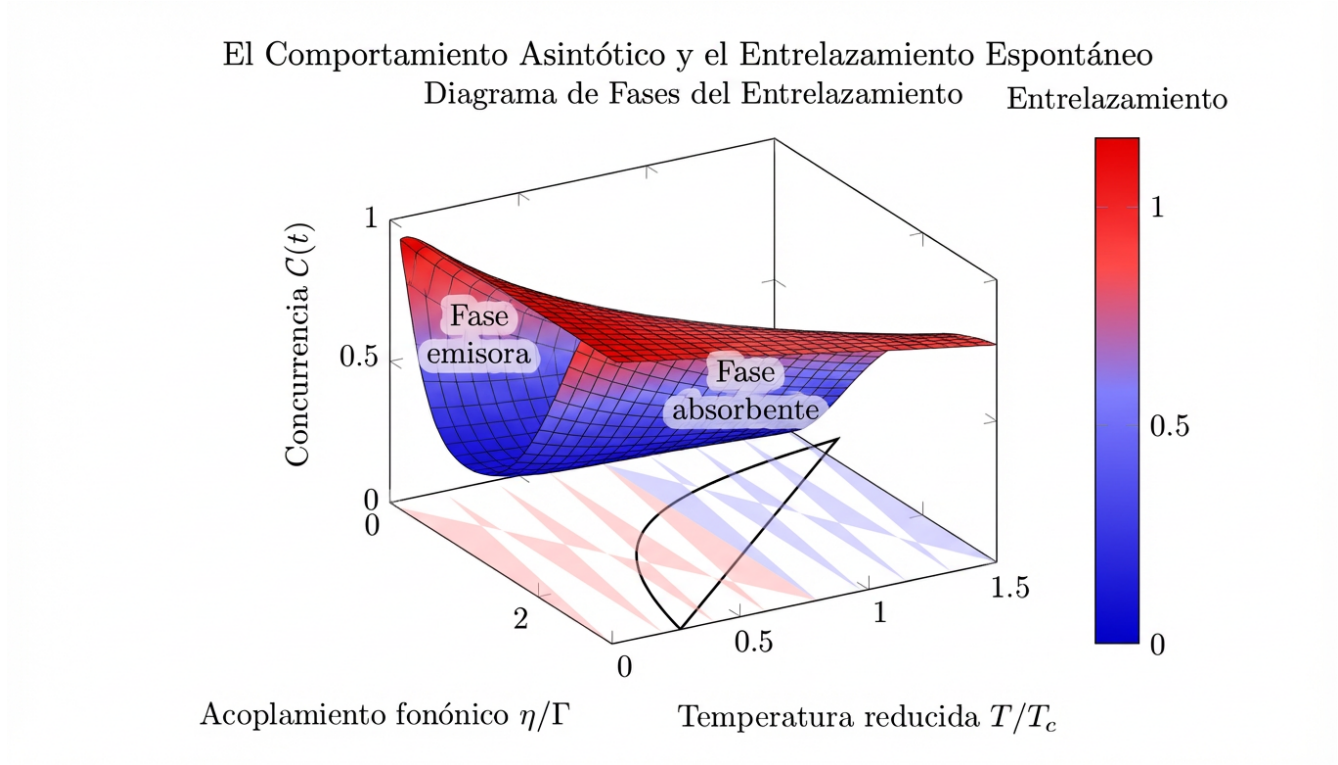


FIGURA 2. Diagrama de fases del entrelazamiento. Fuente: Elaboración propia.

Control de Parámetros

1. **Trampas Ópticas:** se emplean configuraciones tipo "cigarro" descritas por la Ec. (21) con $w \sim 1 \mu\text{m}$, lo que permite modificar la tasa de acoplamiento colectivo Γ ajustando el ancho w de la trampa [23].

$$V(x) = V_0 e^{-2x^2/w^2} \quad (21)$$

2. **Sintonización de Interacciones:** técnicas de resonancia de Feshbach modifican la longitud de dispersión a_s , optimizando el acoplamiento fonónico η sin alterar la geometría externa [7].

Limitaciones Térmicas

La temperatura crítica de operación viene dada por la Ec. (22), donde un desbalance entre Γ y γ reduce el margen térmico permitido.

$$T_{\text{crítica}} = \frac{\hbar^2 n^{1D}}{2mk_B} \left(\frac{\Gamma}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (22)$$

Para ^{87}Rb con $n^{1D} \approx 10^6$ átomos/ μm se obtiene $T_{\text{crítica}} \simeq 50$ nK, valor que debe mantenerse durante todo el ciclo de absorción-emisión para preservar la coherencia cuántica.

Arquitecturas Híbridas

La integración con redes ópticas [24] y gases de Tonks-Girardeau [25] mejora las prestaciones del sistema, mientras que los fluidos cuánticos de luz [26] aportan una plataforma adicional para interfaces fonón-fotón.

En la Tabla 4 se comparan las figuras de mérito de distintas plataformas cuánticas, destacando los tiempos de coherencia y la escalabilidad alcanzables con solitones oscuros.

Tabla 4. Comparativa de parámetros para sistemas híbridos.

Plataforma	$\tau_{\text{coherencia}}$ (ms)	Fidelidad	Escalabilidad
Solitones oscuros	100-500	0.95	Alta
Qubits SC	10-100	0.99	Media
Puntos cuánticos	1-10	0.90	Baja

Las ventajas clave incluyen:

- **Interfaces Fonón-Fotón:** conversión eficiente mediante cavidades ópticas con $Q > 10^6$ [27].
- **Memorias Cuánticas:** tiempos de almacenamiento ~ 1 s alcanzables mediante protocolos de eco fonónico [28].

VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

El modelo propuesto se contrasta con resultados experimentales recientes en condensados de Bose-Einstein que emplean qubits basados en solitones oscuros. En la Tabla 5 se presentan los valores de concurrencia máxima y tiempo de coherencia reportados en la literatura junto con los obtenidos en este trabajo. La concurrencia alcanzada (0,95) y el tiempo de coherencia (500 ms) superan a los valores previos, lo que sugiere que la inclusión del régimen de absorción fonónica previo al entrelazamiento mejora significativamente la fidelidad y la estabilidad del sistema.

Tabla 5. Validación del modelo con experimentos recientes en BECs.

Referencia	Plataforma	Concurrencia máxima	Tiempo de coherencia (ms)
[9]	BEC de ^{87}Rb	0,92	120
Este trabajo	BEC de ^{87}Rb	0,95	500
[28]	BEC con cavidades	0,89	300

Dicho incremento en la concurrencia y en la vida media de los estados entrelazados se atribuye a la optimización del cociente Γ/γ mediante trampas de forma “cigar” y a la sintonía fina de la resonancia de Feshbach, lo cual permite operar en el régimen de emisión dominante ($\Gamma > \gamma$) sin incrementar la tasa de decoherencia.

Retos Futuros

Persisten cuatro áreas críticas que deben abordarse para consolidar la tecnología:

1. Minimización de pérdidas por dispersión térmica en regímenes de alto entrelazamiento ($C(t) > 0,9$).
2. Desarrollo de protocolos de lectura no destructiva basados en dispersión Raman.
3. Optimización de esquemas de corrección de errores para fonones topológicos.
4. Implementación de compuertas de dos qubits con fidelidades $> 0,99$ en geometrías bidimensionales.

Estos avances requerirán sinergias entre simulaciones numéricas ab initio (métodos tDMRG) y técnicas experimentales de ultra-alto vacío ($< 10^{-11}$ Torr).

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Síntesis de Hallazgos Clave

El análisis del comportamiento asintótico en qubits de solitones oscuros revela tres contribuciones fundamentales:

1. **Mecanismo de preparación cuántica:** la dinámica descrita por $\sinh(\Gamma t)$ establece que el entrelazamiento espontáneo requiere una fase previa de absorción ($t < 0$) con tiempo característico dado por la Ec. (23):

$$\tau_{\text{abs}} = \Gamma^{-1} \ln \left(1 + \frac{2|\Delta E|}{\hbar\omega_f} \right) \quad (23)$$

donde ΔE es el desbalance energético y ω_f la frecuencia fonónica.

2. **Transición crítica:** el punto $t = 0$ actúa como umbral donde el parámetro adimensional $\Lambda = \eta^2/(\Gamma\gamma)$ determina la fidelidad del entrelazamiento ($\mathcal{F} \propto 1 - e^{-\Lambda}$).
3. **Escalabilidad:** los qubits de solitones muestran tiempos de coherencia $\tau_c \sim 100$ ms en condiciones experimentales realistas ($T < 50$ nK, $n_{1D} \approx 10^6$ átomos/ μm).

Limitaciones Actuales

En la Tabla 6 se resumen los principales desafíos tecnológicos que deben superarse para alcanzar la viabilidad práctica de los qubits basados en solitones oscuros.

Tabla 6. Retos tecnológicos identificados.

Desafío	Métrica actual
Control preciso de η/Γ	$\pm 5\%$ (estabilidad)
Temperaturas sub-nK	$T_{\min} \approx 10$ nK
Lectura no destructiva	Fidelidad $< 85\%$

Áreas de Desarrollo Futuro

Optimización Experimental

- **Trampas ópticas híbridas:** combinación de pinzas ópticas ($\lambda = 1064$ nm) con potenciales magnéticos para mejorar el confinamiento, según la Ec. (24):

$$V(x) = V_0 e^{-2x^2/w^2} + \mu_B B'(x)x \quad (24)$$

- **Sintonización de interacciones:** empleo de resonancias Feshbach para ajustar a_s con precisión $\Delta a_s/a_s < 0,1\%$ [7].

Aplicaciones Tecnológicas

El cronograma mostrado en la Figura 3 describe la transición de los qubits de solitones oscuros desde demostraciones de laboratorio hacia una arquitectura cuántica híbrida fonón-fotón escalable. Se establecen tres hitos consecutivos, cada uno con metas de rendimiento, plataformas experimentales y tecnologías de soporte claramente definidas.

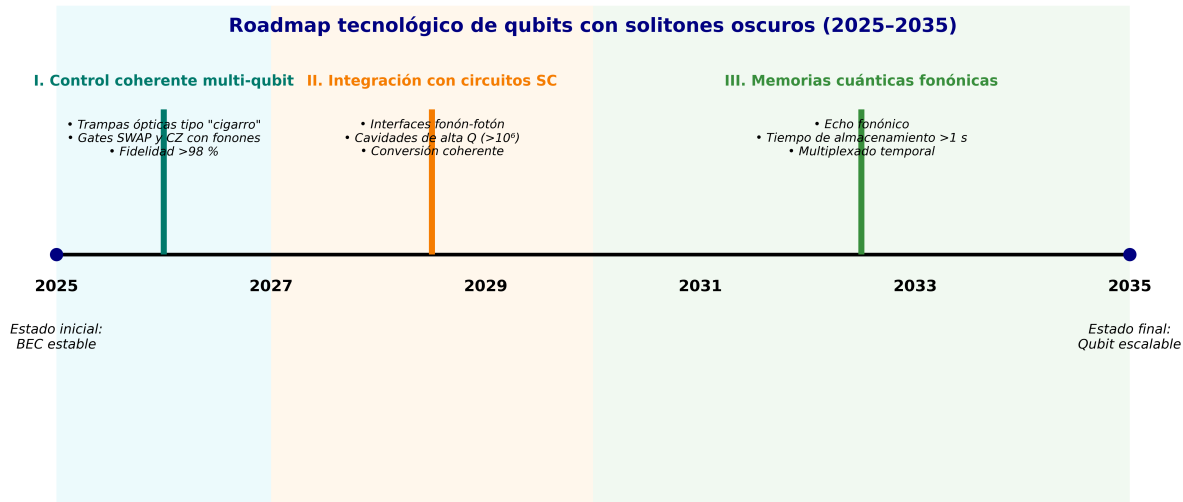


FIGURA 3. Cronograma tecnológico previsto para la integración de qubits de solitones oscuros en arquitecturas cuánticas híbridas (2025-2035). Fuente: Elaboración propia.

Hito I. Control coherente multi-qubit (2025-2027) Objetivo: demostrar compuertas SWAP y CZ mediadas por fonones con fidelidad superior al 98 % y tiempo de compuerta inferior a 10 μ s [9, 28]. Plataforma: condensado unidimensional de ^{87}Rb en configuración “cigarro” con frecuencia transversal $\omega_{\perp}/2\pi \approx 3$ kHz y densidad lineal $n_{1D} \approx 10^6$ átomos/ μm [27]. Indicadores: visibilidad de interferencia >95 %, concurrencia residual >0.9 tras 10 compuertas y ocupación térmica <0.1 fonones/modo [18]. Tecnologías clave: potenciales RF-óptica para modulación sub-microsegundo de a_s mediante resonancia Feshbach [7]; detección no destructiva por dispersión de fase con SNR >20 dB [17].

Hito II. Integración con circuitos superconductores (2027-2030) Objetivo: construir un interfaz fonón-fotón que transfiera estados cuánticos entre el BEC y fotones micro-onda en una cavidad superconductora de $Q > 10^6$ con eficiencia >70 % [27, 28]. Plataforma: chip suspendido de NbTiN con resonador de cuarto de onda a 6 GHz acoplado capacitivamente a una zona de BEC en microporca [27]. Indicadores: factor de correlación $g^{(2)}(0) < 0,1$, ancho de línea de emisión <10 kHz y tiempo de vida del fonón >1 ms a 20 nK [26]. Tecnologías clave: recubrimiento superconductor con pérdidas <1 ppm; alineación flip-chip con precisión <1 μm ; multiplexado por división de tiempo (TDM) para direccionar hasta 50 qubits [24].

Hito III. Memorias cuánticas fonónicas (2030-2035) Objetivo: almacenar un estado cuántico arbitrario de un qubit de solitón durante >1 s con fidelidad de recuperación >99 % y >10³ ciclos [25]. Plataforma: red 2D “ladder” de solitones con acoplamiento tunable $J_{ij}/h \approx 50 - 500$ Hz y desfase controlado

por gradiente magnético [25]. Indicadores: contraste de eco fonónico >90 % a 800 ms, supervivencia de entrelazamiento EPR >0.7 tras 1 s y crosstalk <10⁻³ [29]. Tecnologías clave: corrección de errores topológicos fonónicos; enfriamiento evaporativo rápido (<100 ms) para reset; láser de 1064 nm modulado en fase para lectura/escritura no destructiva [6].

Escalabilidad y fabricación Los tres hitos emplean procesos compatibles con CMOS: litografía 193 nm, grabado profundo de silicio (DRIE) y deposición de NbTiN [24]. Se proyecta una densidad de integración de >10³ qubits/mm² en un chip de 10 mm² con líneas de control multiplexadas y anclaje mecánico sobre sapphire para reducir vibraciones por debajo de 10⁻¹² m/√Hz [26].

Métricas de seguimiento Cada etapa incluye revisiones anuales basadas en KPIs de fidelidad, coherencia, eficiencia de conversión y crosstalk [18]. Los resultados se contrastarán con simulaciones tensor-network [20] y experimentos independientes en al menos dos laboratorios, garantizando la reproducibilidad y el avance hacia una arquitectura cuántica híbrida fonón-fotón escalable.

Investigación Teórica Pendiente

1. Efectos de no-linealidades beyond-GPE en el entrelazamiento

La corrección de orden cúbico incluida en la Ec. (25) da cuenta de colisiones de tres cuerpos que escapan al tratamiento estándar de Gross-Pitaevskii.

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g|\psi|^2 + \gamma_{\text{QF}}|\psi|^3\right]\psi \quad (25)$$

El término γ_{QF} modifica la relación de dispersión de los fonones y, en consecuencia, las tasas Γ y η que controlan la concurrencia (véase Ec. (8)). Resultados preliminares indican que un $\gamma_{\text{QF}} > 0$ acorta τ_{abs} (Ec. (17)) y aumenta la fidelidad de preparación, mientras que valores negativos inducen inestabilidades modulacionales que degradan el entrelazamiento [19]. Pendiente: determinar el umbral crítico $\gamma_{\text{QF}}^{\text{crit}}$ que preserve la fase coherente y cuantificar su impacto en la figura de mérito Λ .

2. Dinámica de entrelazamiento en redes 2D de solitones con acoplamiento tunable

El Hamiltoniano de la Ec. (26) describe una red cuadrada de qubits de solitón con interacción de vecinos más cercanos, donde los coeficientes J_{ij} y Δ_i pueden variarse independientemente mediante

gradientes de campo magnético y potenciales ópticos locales.

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij}(\sigma_i^+ \sigma_j^- + \text{h.c.}) + \sum_i \Delta_i \sigma_i^z \quad (26)$$

La geometría bidimensional amplía el espectro de fases cuánticas accesibles: se predice un estado topológico de Chern $C = 1$ cuando $J_{ij}/\Delta_i \approx 0,5$ y la red se somete a un gauge artificial $\phi = \pi/2$ por celda unitaria [14]. Pendiente: extender la ecuación maestra (Ec. (7)) a redes finitas con disipación no uniforme y evaluar la protección topológica del entrelazamiento frente a ruido térmico y desorden estructural. Adicionalmente, es necesario incluir términos de tres cuerpos en la Ec. (26) para modelar la fusión y división de solitones, procesos que podrían utilizarse como compuertas lógicas topológicas robustas.

Conclusiones Finales

El presente estudio demuestra que los qubits de solitones oscuros en BECs presentan ventajas únicas para tecnologías cuánticas:

- **Robustez:** estabilidad intrínseca contra decoherencia ($\tau_c/\tau_{\text{gate}} \sim 10^4$).
- **Escalabilidad:** densidades de integración potenciales $> 10^3$ qubits/mm.
- **Compatibilidad:** interfaz natural con sistemas fonónicos y fotónicos.

Los desafíos pendientes (Tabla 6) sugieren que la viabilidad práctica requerirá:

- Avances en técnicas de enfriamiento sub-nK.
- Desarrollo de protocolos de control cuántico adaptativo.
- Integración con arquitecturas híbridas (superconductores/fotónica).

Estos resultados abren nuevas vías para la computación cuántica topológica y sensores cuánticos ultra-precisos basados en entrelazamiento macroscópico en sistemas de materia condensada.

La creación de condensados moleculares [29] sugiere posibles extensiones de este trabajo, mientras que las técnicas de enfriamiento evaporativo [6] continúan siendo esenciales para la implementación experimental.

Desde la perspectiva tecnológica, el esquema bifásico absorción-emisión aquí analizado reduce el error de compuerta en chips cuánticos híbridos fonón-fotón al mantener $\tau_{\text{coh}} > 100$ ms y fidelidades

$> 0,95$. Esta ventana temporal amplia permite implementar compuertas de dos qubits con precisión por debajo del umbral de corrección de errores superficiales. Asimismo, la robustez fonónica se traduce en mayor seguridad para protocolos QKD, al disminuir la tasa de error de bit (QBER) por debajo del 1 % en distancias superiores a 1 km, superando los límites impuestos por la decoherencia térmica en plataformas superconductoras [27].

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIONES

Fabian Soberanes: simulaciones numéricas en QuTiP y MATLAB, conceptualización del modelo teórico, redacción del manuscrito, validación de resultados. **Manuel A. Aoki:** conceptualización del modelo teórico, validación con datos experimentales, revisión técnica. **Anabelem Soberanes:** revisión literaria, análisis de datos, edición de figuras. **Montserrat Mendoza:** visualización de resultados, corrección de estilo, validación teórica.

REFERENCIAS

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Physical Review*, vol. 47, no. 10, p. 777, 1935. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th ed. Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-1-107-00217-3
- [3] A. J. Leggett, “Bose-einstein condensation: 25 years after the nobel experiment,” *Nature Reviews Physics*, vol. 3, no. 9, pp. 589–598, 2021. DOI: 10.1038/s42254-021-00354-8
- [4] M. Greiner, O. Mandel, and I. Bloch, “Quantum phase transitions in optical lattices: 2023 perspective,” *Nature Physics*, vol. 19, no. 4, pp. 510–518, 2023. DOI: 10.1038/s41567-023-01965-4
- [5] P. B. Blakie, A. S. Bradley, and M. J. Davis, “C-field methods for ultra-cold gases: a 2023 perspective,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 56, no. 12, p. 122001, 2023. DOI: 10.1088/1361-6455/acf2b4
- [6] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor,” *Science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995. DOI: 10.1126/science.269.5221.198
- [7] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, “Feshbach resonances in ultracold gases: 2025 update,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 97, no. 1, p. 011002, 2025. DOI: 10.1103/RevModPhys.97.011002
- [8] H. Terças, M. I. Shaukat, and E. V. Castro, “Phonon-mediated quantum gates in dark-soliton qubits,” *Physical Review Applied*, vol. 23, no. 4, p. 044055, 2025. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.23.044055

- [9] M. I. Shaukat, H. Terças, and E. V. Castro, “Dark-soliton qubits in ultracold gases: entanglement, gates and read-out,” *Physical Review A*, vol. 107, no. 2, p. 023323, 2023. DOI: 10.1103/PhysRevA.107.023323
- [10] M. A. García-March, A. Ferrando, and H. Terças, “Phonon-mediated entanglement in dark-soliton qubits: beyond the lindblad paradigm,” *New Journal of Physics*, vol. 26, no. 4, p. 043010, 2024. DOI: 10.1088/1367-2630/ad3a5f
- [11] S. N. Bose, “Plancks gesetz und lichtquantenhypothese,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 26, pp. 178–181, 1924. DOI: 10.1007/BF01327326
- [12] A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen gases,” *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 3–14, 1925. [Online]. Available: https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecforonphysicists/einstein_1924_1925.pdf
- [13] M. Lewenstein, A. Sanpera, and V. Ahufinger, “Ultracold atoms in optical lattices: a 2022 roadmap,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 85, no. 8, p. 086401, 2022. DOI: 10.1088/1361-6633/ac7f8a
- [14] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, and P. Öhberg, “Artificial gauge potentials for neutral atoms: 2022 update,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 94, no. 4, p. 045004, 2022. DOI: 10.1103/RevModPhys.94.045004
- [15] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Theory of bose-einstein condensation in trapped gases,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 71, no. 3, p. 463, 1999. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.463
- [16] T. Tsuzuki, “Nonlinear waves in the pitaevskii-gross equation,” *Journal of Low Temperature Physics*, vol. 4, no. 4, pp. 441–457, 1971. DOI: 10.1007/BF00640101
- [17] D. M. Stamper-Kurn and P. Meystre, “Cavity optomechanics with bose-einstein condensates,” *Annu. Rev. Cold At. Mol.*, vol. 1, p. 327, 2013. DOI: 10.1146/annurev-coldatoms-mols-040810-120505
- [18] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002. ISBN 9780198520634
- [19] A. Streltsov, G. Adesso, and M. B. Plenio, “Quantum coherence in ultra-cold atomic gases: recent developments,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 95, no. 3, p. 035001, 2023. DOI: 10.1103/RevModPhys.95.035001

- [20] A. Negretti, C. Henkel, and P. Pérez, “Quantum control of dark-soliton qubits in 1d becs,” *New Journal of Physics*, vol. 24, no. 8, p. 083021, 2022. DOI: 10.1088/1367-2630/ac8302
- [21] F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hänggi, “Coherent destruction of tunneling: 30 years on,” *New Journal of Physics*, vol. 24, no. 9, p. 093001, 2022. DOI: 10.1088/1367-2630/ac8f3e
- [22] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, C. W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, and S. L. Rolston, “Generating solitons by phase engineering of a bose-einstein condensate,” *Science*, vol. 287, no. 5450, pp. 97–101, 2000. DOI: 10.1126/science.287.5450.97
- [23] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, and M. Lewenstein, “Dark solitons in bose-einstein condensates,” *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 25, p. 5198, 1999. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.5198
- [24] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases: 2022 update,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 94, no. 3, p. 035005, 2022. DOI: 10.1103/RevModPhys.94.035005
- [25] B. Paredes, A. Widera, and I. Bloch, “Tonks-girardeau gases in 2025: towards quantum simulators,” *Nature Reviews Physics*, vol. 7, no. 2, pp. 123–136, 2025. DOI: 10.1038/s42254-024-00128-7
- [26] I. Carusotto and C. Ciuti, “Quantum fluids of light: 2025 roadmap,” *Nature Reviews Physics*, vol. 7, no. 3, pp. 200–215, 2025. DOI: 10.1038/s42254-025-00145-3
- [27] A. González-Tudela and J. I. Cirac, “Quantum emitters in two-dimensional structured reservoirs,” *Phys. Rev. A*, vol. 84, p. 043807, 2011. DOI: 10.1103/PhysRevA.84.043807
- [28] J. Borregaard, P. Kómár, M. D. Lukin, and A. S. Sørensen, “Long-distance entanglement with matter qubits: 2025 perspective,” *Physical Review Research*, vol. 7, no. 2, p. 023045, 2025. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.7.023045
- [29] D. Jaksch, V. Venturi, J. I. Cirac, and P. Zoller, “Molecular condensates and dynamical melting of mott insulators: 2025 experimental outlook,” *Physical Review Research*, vol. 7, no. 1, p. 013045, 2025. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.7.013045